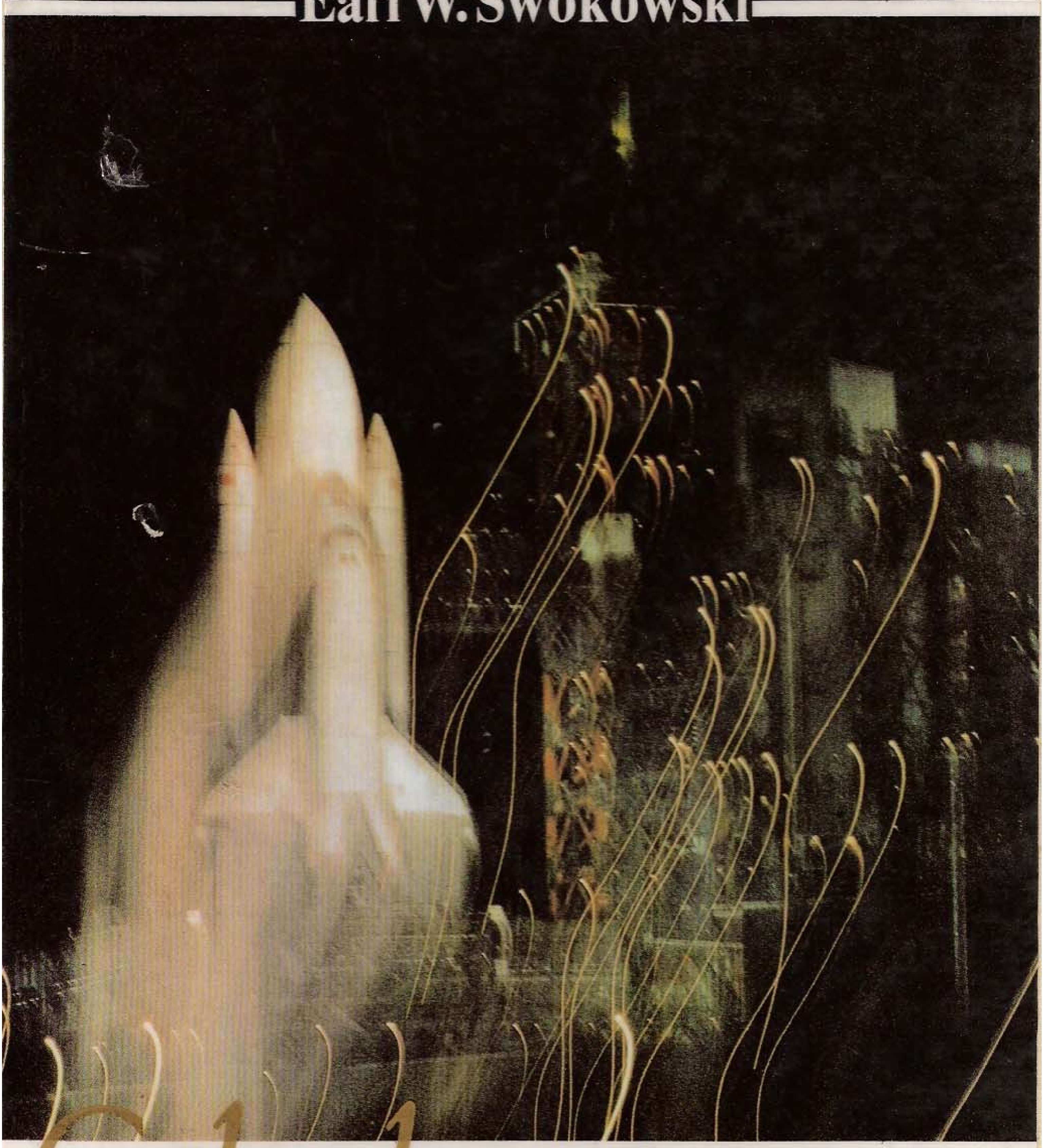
Earl W. Swokowski



Cálculo con Geometría Analítica

Segunda Edición

ÁLGEBRA

EXPONENTES Y RADICALES

$a^m a^n = a^{m+n}$ $\qquad$ $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

$(a^m)^n = a^{mn}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$(ab)^n = a^n b^n$ $\qquad$ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $\qquad$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\qquad$ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

VALOR ABSOLUTO ($d > 0$)

$|x| < d$ si y sólo si $-d < x < d$

$|x| > d$ si y sólo si $x > d$ o bien $x < -d$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

$-|a| \leq a \leq |a|$

DESIGUALDADES

Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$

Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$

Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$

Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$

FÓRMULA CUADRÁTICA

Si $a \neq 0$, las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

LOGARITMOS

$y = \log_a x$ significa $a^y = x$ $\qquad$ $\log_a 1 = 0$

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ $\qquad$ $\log_a a = 1$

$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ $\qquad$ $\log x = \log_{10} x$

$\log_a x^r = r \log_a x$ $\qquad$ $\ln x = \log_e x$

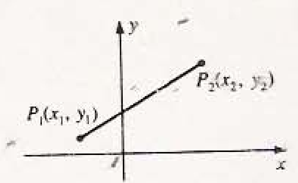
FÓRMULA DEL BINOMIO

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + y^n,$$

$\binom{n}{\ }$ $\quad$ $n!$

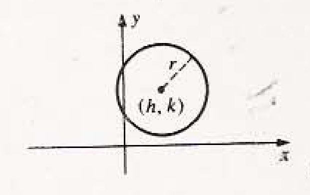
GEOMETRÍA ANALÍTICA

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS



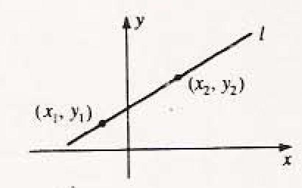
$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y$

CIRCUNFERENCIA



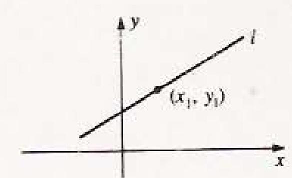
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

PENDIENTE m DE UNA RECTA



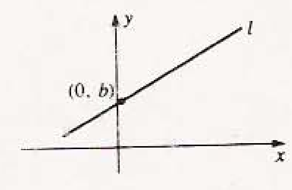
$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

FORMA PUNTO-PENDIENTE



$y - y_1 = m(x - x_1)$

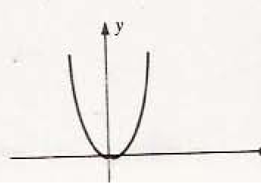
FORMA PENDIENTE-INTERCEPCIÓN



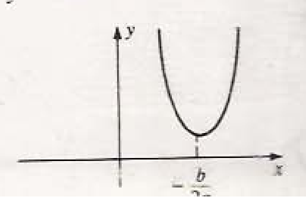
$y = mx + b$

GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

$y = ax^2,\ a > 0$



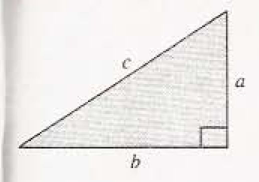
$y = ax^2 + bx + c,\ a > 0$



GEOMETRÍA

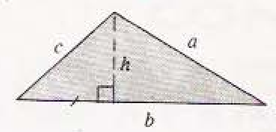
Área A: perímetro C; volumen V; área lateral o de superficie curva S.

TRIÁNGULO RECTÁNGULO



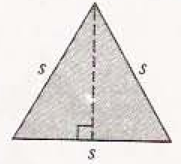
Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

TRIÁNGULO



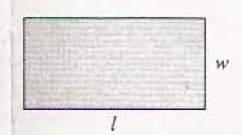
$A = \frac{1}{2}bh \qquad C = a + b + c$

TRIÁNGULO EQUILÁTERO



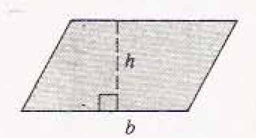
$h = \frac{\sqrt{3}}{2}s \qquad A = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$

RECTÁNGULO



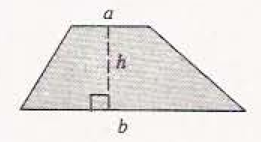
$A = lw \qquad C = 2l + 2w$

PARALELOGRAMO



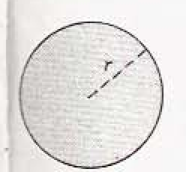
$A = bh$

TRAPECIO



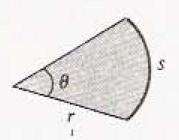
$A = \frac{1}{2}(a + b)h$

CÍRCULO



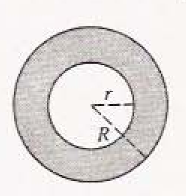
$A = \pi r^2 \qquad C = 2\pi r$

SECTOR CIRCULAR



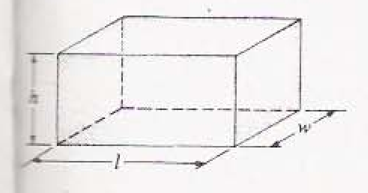
$A = \frac{1}{2}r^2\theta \qquad s = r\theta$

CORONA CIRCULAR



$A = \pi(R^2 - r^2)$

PRISMA RECTANGULAR



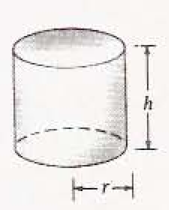
$V = lwh \qquad S = 2(hl + lw + hw)$

ESFERA



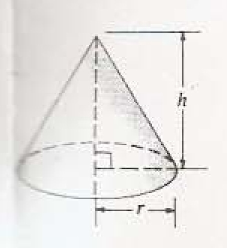
$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad S = 4\pi r^2$

CILINDRO CIRCULAR RECTO



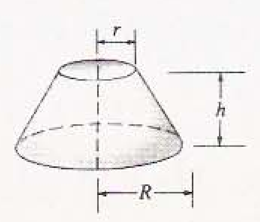
$V = \pi r^2 h \qquad S = 2\pi rh$

CONO CIRCULAR RECTO



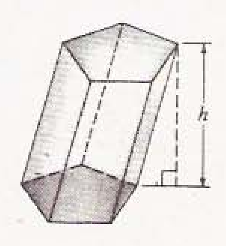
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

TRONCO DE CONO



$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + rR + R^2)$

PRISMA OBLICUO (SECCION CUALQUIERA)



$V = Bh$, siendo B = área de la base

CÁLCULO
CON
GEOMETRÍA
ANALÍTICA

CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA

Segunda Edición

Earl W. Swokowski
Marquette University

Traductores:
José Luis Abreu (PhD, MIT)
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)
México, D.F., México
Martha Oliveró (M. en C.)
Universidad Complutense
Madrid, España
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)
México, D.F., México

Revisores Técnicos:
Miguel Moreno Moreno
Universidad Autónoma de Barcelona
Barcelona, España
Iván Castro Chadid
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia
Rosa María Farfán
Ricardo Cantoral
Instituto Politécnico Nacional
CINVESTAV
México, D.F., México
Eugene Francis
Universidad de Puerto Rico
Campus Río Piedras
San Juan, Puerto Rico

Revisor Editorial:
Francisco Paniagua Bocanegra
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)
México, D.F., México
Miembro de la U.S. Metric Association (USMA)

S.A. de C.V.
Grupo Editorial Iberoamérica
Nebraska 199. Col. Nápoles, 03810 México, D.F. Tel. 523 09 94 Fax. 543 11 73

A Maureen

CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA
Segunda Edición

Versión en español de la obra
Calculus With Analytic Geometry — 4th Edition
por Earl W. Swokowski.
Edición original en inglés publicada por PWS Publishers,

ISBN 0-87150-007-8

ISBN 968-7270-43-8
Impreso en México

Editor: Nicolás Grepe P.
Productor: Oswaldo Ortiz R.
Fotografía de cubierta: René Burri / Magnum Photos, Inc.

Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.
Nebraska 199, Col. Nápoles, C.P. 03810 México, D.F.
Tel. 523-0994 Fax. 543-1173
Apdo. 5-192, C.P. 06500
Reg. CNIEM 1382

PRÓLOGO

Esta nueva versión de *Cálculo con Geometría Analítica* constituye una revisión detallada de la anterior edición de la obra. Una de mis metas fue mantener la solidez matemática de la versión que antecedió a ésta, pero con un lenguaje menos formal, reelaborando el texto y poniendo más énfasis en las gráficas y las figuras. Otro de los objetivos fue destacar la utilidad del Cálculo a través de una variedad de nuevos ejemplos y ejercicios de aplicación de muchas disciplinas diferentes. Por último, las sugerencias que recibí de los profesores me llevaron a modificar el orden de presentación de algunos temas.

Para esta edición mucho del material que se tenía fue escrito de nuevo, se reorganizó y se preparó nuevo material de manera que una lista en detalle de los cambios resultaría demasiado larga. Los siguientes comentarios solamente señalan los cambios principales con respecto a la edición anterior.

CARACTERÍSTICAS DE ESTA EDICIÓN

- En el repaso de gráficas de funciones del Capítulo 1 se incluyen desplazamientos horizontales y verticales, ampliaciones y reflexiones. Muchos de los ejercicios de aplicación fueron diseñados a fin de preparar a los estudiantes para su trabajo posterior con máximos y mínimos y rapideces de variación relacionadas.
- En el Capítulo 2 se motiva informalmente el concepto de límite antes de la presentación rigurosa que se da en la Sección 2.3. Como ayuda para motivar a los estudiantes en esta etapa temprana del Cálculo se incluyen ejemplos y ejercicios referentes a aplicaciones poco frecuentes, tales como gases comprimidos, óptica, aceleraciones experimentadas por los astronautas, dosis adecuadas de los medicamentos y teoría de la relatividad.
- El concepto de tasa de variación o razón de cambio (anteriormente incluido en el Capítulo 4) se presenta en la Sección 3.3 para ofrecer desde el principio una mayor variedad de aplicaciones de la derivada. Las rapideces de variación relacionadas se presentan en la Sección 3.9.
- El Capítulo 4 contiene los conceptos relacionados con los máximos y mínimos, la graficación y las antiderivadas. Las aplicaciones a la economía (que anteriormente constituían una sección aparte) se colocaron donde resultaba apropiado en éste y en otros capítulos.
- Las propiedades de la integral definida y la definición de valor medio de una función se presentan en una sección del Capítulo 5. La

integración numérica y el uso de datos aproximados se consideran al final del mismo, y las aplicaciones se discuten en el Capítulo 6.

- Los conceptos de longitud de arco y superficies de revolución se presentan en la Sección 6.5, de manera que las aplicaciones matemáticas de la integral definida se consideran en la primera mitad del Capítulo 6. Las aplicaciones a la física que se presentan en la segunda mitad del capítulo son independientes entre sí y se pueden estudiar en cualquier orden (o bien pueden omitirse), según los objetivos del curso. Los momentos y el centro de masa de una lámina se discuten en la Sección 6.8. En la última sección se dan varias aplicaciones a otras áreas.
- El Capítulo 7 comprende un gran número de ejemplos y ejercicios sobre aplicaciones a diversos campos de las funciones logaritmo natural y exponencial natural.
- Al principio del Capítulo 8 se da un repaso de las funciones trigonométricas (que anteriormente aparecía en un apéndice). Se incluyen las gráficas de las seis funciones trigonométricas.
- El Capítulo 9 se limita a presentar los métodos de integración, y las aplicaciones de capítulos anteriores que requieren métodos avanzados de integración se vuelven a considerar en los ejercicios.
- El Capítulo 10 contiene muchos ejemplos y ejercicios nuevos de aplicación de las formas indeterminadas y las integrales impropias.
- La presentación de las sucesiones infinitas en el Capítulo 11 proporciona una motivación geométrica de los conceptos de convergencia y divergencia. El criterio de la razón para series de términos positivos se presenta antes, y las series alternantes se discuten junto con la convergencia absoluta en una misma sección. Hay una tabla nueva que resume todos los criterios discutidos en el capítulo.
- En el Capítulo 12 se destaca el concepto de excentricidad de las secciones cónicas. Hay aplicaciones a la navegación con el sistema *loran* y a las órbitas de planetas y cometas.
- Las rectas tangentes, la longitud de arco y las superficies de revolución, temas relacionados con las curvas paramétricas, se agrupan en una sección del Capítulo 13. Las ecuaciones polares de las cónicas se presentan en la última sección.
- El Capítulo 14 se organizó mejor de manera que los vectores en tres dimensiones están inmediatamente después de los vectores en dos dimensiones. Las rectas y los planos se discuten en una sección, y los cilindros y las superficies cuádricas en otra.
- En el Capítulo 15 se acentúa el significado geométrico de las funciones vectoriales con ayuda de muchas figuras, ejemplos y ejercicios.
- El Capítulo 16 contiene cincuenta nuevas figuras (incluyendo gráficas por computadora) en la exposición y en los ejercicios. Se introducen los diagramas de árbol o arboriformes como ayuda para visualizar la regla de la cadena. Se da atención especial al concepto del gradiente en las secciones posteriores del capítulo.
- Las integrales dobles en coordenadas polares y el concepto de área de una superficie aparecen antes en el Capítulo 17. Los momentos y el centro de masa de un sólido no homogéneo se discuten casi al final del capítulo. El teorema general sobre el cambio de variables en integrales múltiples (que antes se encontraba en la Sección 18.9) se presenta en la Sección 17.9.
- En el Capítulo 18 hay una definición y un teorema de evaluación que unifican los tres tipos de integrales de línea en dos dimensiones. Se hace énfasis en los campos vectoriales conservativos. Las fórmulas de evaluación de integrales de superficie se dan en un teorema. La divergencia y el rotacional de un campo vectorial se motivan a través de ejemplos.
- El Capítulo 19 contiene una discusión de las ecuaciones diferenciales lineales de primero y segundo órdenes con aplicaciones.

CARACTERÍSTICAS DEL LIBRO

APLICACIONES Todo libro de Cálculo tiene problemas con aplicaciones a ingeniería, física, química, biología y economía. Esta revisión incluye también ejercicios para campos especializados como fisiología, sociología, psicología,

ecología, oceanografía, meteorología, radioterapia, astronaútica y transportación.

EJEMPLOS Cada sección contiene ejemplos cuidadosamente elegidos para ayudar a los estudiantes a entender y asimilar los nuevos conceptos. Siempre que es posible se incluyen aplicaciones para mostrar la utilidad de un tema.

EJERCICIOS Los conjuntos de ejercicios comienzan con problemas rutinarios y van aumentando paulatinamente su grado de dificultad. Los problemas de aplicaciones aparecen generalmente hacia el final del conjunto para permitir a los estudiantes adquirir confianza en las operaciones y las nuevas ideas, antes de tratar cuestiones que requieren el análisis de situaciones prácticas.

Se incluyen más de 300 ejercicios nuevos de aplicaciones para hacer énfasis en la flexibilidad y en el poder del Cálculo. Muchas de las aplicaciones son novedosas y difieren mucho de las aplicaciones tradicionalmente expuestas en los libros de Cálculo.

Hay una sección de repaso al final de cada capítulo que consta de una lista de temas importantes y ejercicios pertinentes.

Al final del libro se dan las respuestas a los ejercicios de número impar.

CALCULADORAS Se hace referencia a las calculadoras en los lugares apropiados. La mayoría de los ejercicios se pueden resolver sin utilizar calculadora pero los profesores pueden fomentar su uso para los cálculos con base en datos aproximados.

DISEÑO INTERIOR Se han usado colores para ayudar a seguir los razonamientos y subrayar los conceptos más importantes. Se trazaron de nuevo todas las figuras para esta edición y, cuando fue posible, se colocaron en el margen al lado del texto correspondiente. En general, todas las gráficas tienen los rótulos necesarios y en ellas se usan colores para hacer más claras las figuras complicadas. A muchos conjuntos de ejercicios se les añadieron croquis y dibujos para ayudar a visualizar los problemas aplicados.

FLEXIBILIDAD La variedad de programas y planes de estudios de las escuelas que han usado las ediciones anteriores es prueba de la flexibilidad del libro. Las secciones y los capítulos se pueden ordenar de diversas maneras, dependiendo de los objetivos y la duración del curso.

AYUDAS PARA EL PROFESOR

Pueden obtenerse con la editorial las siguientes ayudas (en inglés) para la enseñanza:

Complete Solutions Manual, vols. I y II, por Jeff Cole, de Anoka-Ramsey Community College, y Gary Rockswold, de Mankato State University.

Soluciones para los ejercicios de número par.

Generador de exámenes computadorizado (para computadoras personales IBM y compatibles).

Banco de exámenes impresos.

AYUDAS PARA EL ESTUDIANTE

Se pueden obtener con la editorial los siguientes elementos de ayuda (en inglés):

Student Supplement, vols. I y II, por Thomas A. Bronikowski, de Marquette University, que contiene la solución a cada tercer problema de ejercicio del texto.

Programmed Study Guide, por Roy A. Dobyns, de Carson-Newman College, que cubre los primeros nueve capítulos del texto.

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer a Michael R. Cullen de Loyola Marymount University por haber proporcionado la mayoría de los nuevos ejercicios de aplicaciones. Esta gran variedad de problemas aporta una fuerte motivación para los conceptos matemáticos que se exponen en el libro. El profesor Cullen también proporcionó las gráficas por computadora que acompañan a algunos de estos ejercicios. Christian C. Braunschweiger de

Marquette University contribuyó con muchas sugerencias que mejoraron la exposición.

También quiero agradecer a las siguientes personas que revisaron el manuscrito:

H.S. Butts, *Louisiana State University*
Dawson Carr, *Sandhills Community College*
Mark P. Hale, Jr., *University of Florida*
Dale T. Hoffman, *Bellevue Community College*
Joseph E. Hyman, *El Camino College*
G. Philip Johnson, *Oakland University*
Elgin Johnston, *Iowa State University*
Herbert M. Kamowitz, *University of Massachusetts-Boston*
James T. Loats, *Metropolitan State College*
Robert H. Lohman, *Kent State University*
Stanley M. Lukawecki, *Clemson University*
Francis E. Masat, *Glassboro State College*
Judith R. McKinney, *California State Polytechnic University-Pomona*
J. Osterburg, *University of Cincinnati*
Neal C. Raber, *University of Akron*
Dennis Ryan, *Wright State University*
Nancy M. Thompson, *Metropolitan State College*
John R. Unbehaun, *University of Wisconsin-La Crosse*
R. Voronka, *New Jersey Institute of Technology*
Alan Wiederhold, *San Jacinto College*
Dennis H. Wortman, *University of Massachusetts-Boston*

y a los profesores de matemáticas que se reunieron conmigo y con los representantes de PWS-KENT durante varios días en el verano de 1986 y que posteriormente revisaron algunas partes del manuscrito:

Cliff Clarridge, *Santa Monica College*
Jeff Cole, *Anoka-Ramsey Community College*
Michael Cullen, *Loyola Marymount University*
Bruce Edwards, *University of Florida*
Michael Schneider, *Belleville Area College*

Sus comentarios sobre didáctica y pedagogía general y sus recomendaciones específicas acerca del contenido de los cursos de Cálculo fueron una gran ayuda para mejorar este libro.

Expreso mi gratitud por la excelente cooperación que recibí del personal de PWS-KENT. Hay dos personas de esta editorial que merecen un reconocimiento especial. La supervisora editorial de producción Kathi Townes realizó un trabajo verdaderamente excepcional en el diseño del libro y cuidando un gran número de detalles relacionados con la elaboración gráfica. No puedo agradecerle suficientemente su ayuda. El director de ediciones Dave Geggis supervisó el proyecto, se comunicó con muchos revisores y usuarios de mis libros y fue una fuente continua de información y consejos.

Además de a todas las personas mencionadas, quiero expresar mi sincero aprecio a los muchos estudiantes y profesores no mencionados que me han ayudado a conformar mi perspectiva de cómo se debe exponer el Cálculo en el salón de clase.

EARL W. SWOKOWSKI

AL ESTUDIANTE

El Cálculo se inventó en el siglo XVII como un medio para estudiar los problemas en que intervenía el movimiento. El álgebra y la trigonometría pueden servir para estudiar los objetos que se mueven con velocidad constante a lo largo de una trayectoria rectilínea o circular, pero si la velocidad es variable o la trayectoria es irregular, se necesita el Cálculo. Una descripción rigurosa del movimiento requiere definiciones precisas de *velocidad* (la rapidez con la que varía la distancia respecto al tiempo) y de *aceleración* (la rapidez de cambio de la velocidad). Estas definiciones pueden darse usando uno de los conceptos fundamentales del Cálculo: la *derivada*.

Aunque el Cálculo se desarrolló para resolver problemas de física, su poder y flexibilidad lo han hecho útil en muchos campos de estudio. Las aplicaciones modernas de la derivada incluyen las investigaciones sobre la rapidez o tasa de crecimiento de un cultivo de bacterias, la predicción del resultado de una reacción química, la medición de los cambios instantáneos de una corriente eléctrica, la descripción del comportamiento de las partículas atómicas, la estimación de la reducción de los tumores con la radioterapia, la predicción de las ganancias y las pérdidas económicas y el análisis de las vibraciones de un sistema mecánico.

La derivada también es útil para resolver problemas de máximos y mínimos, tales como el de la fabricación de la caja rectangular más barata que ha de tener un volumen dado, el cálculo de la mayor distancia que un cohete puede recorrer, la determinación de la máxima circulación que debe permitirse al tránsito sobre un puente largo, la determinación del número de pozos que hay que perforar en un campo de petróleo para lograr la producción más eficiente, la determinación del punto entre dos fuentes de luz en el que la iluminación será mayor y la maximización del ingreso de una compañía industrial o comercial debido a un producto determinado. Los matemáticos aplican las derivadas a menudo para encontrar rectas tangentes a curvas y como ayuda para analizar las gráficas de funciones complicadas.

Otro de los conceptos fundamentales del Cálculo —la *integral definida*— tiene su origen en el problema de evaluar el área de una región con frontera curva. Las integra-

les definidas se utilizan tan extensamente y en campos tan diversos como las derivadas. Algunas de sus aplicaciones son localizar el centro de masa o el momento de inercia de un sólido, determinar el trabajo requerido para enviar una nave espacial a otro planeta, calcular el flujo sanguíneo a través de una arteriola, estimar la depreciación del equipo de una fábrica e interpretar la magnitud de la dilución de un tinte en las pruebas fisiológicas que se hacen con métodos de rastreo. También se pueden usar las integrales definidas para investigar conceptos matemáticos tales como el área de una superficie curva, el volumen de un sólido geométrico o la longitud de una curva.

Los conceptos de la derivada y la integral definida se definen por medio de límites. La noción de *límite* es la primera noción que separa al Cálculo de las matemáticas comunes. Sir Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) descubrieron independientemente uno del otro la relación entre las derivadas y las integrales, y se atribuye a ambos la invención del Cálculo. Muchos otros matemáticos han contribuido de manera importante a su desarrollo durante los últimos 300 años.

Las aplicaciones del Cálculo mencionadas anteriormente representan solamente algunas de las muchas que se consideran en este libro. No podríamos describir todas las aplicaciones del Cálculo, que con cada avance en la tecnología se desarrollan más. Cualquiera que sea el campo de interés del lector, probablemente usará el Cálculo en algunas de sus investigaciones puras o aplicadas. Quizás el propio lector descubra una nueva aplicación en alguna rama de la ciencia.

CONTENIDO

PRÓLOGO v
AL ESTUDIANTE ix

1 LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS 1

1.1 Los números reales 2
1.2 Sistemas de coordenadas en dos dimensiones 11
1.3 La recta 20
1.4 La definición de función 29
1.5 Operaciones con las funciones 40
1.6 Repaso 48

2 LÍMITES DE FUNCIONES 51

2.1 Introducción al Cálculo 52
2.2 Definición informal de límite 59
2.3 Definición formal de límite 67
2.4 Métodos para calcular límites 73
2.5 Funciones continuas 82
2.6 Repaso 91

3 LA DERIVADA 93

3.1 Definición de la derivada 94
3.2 Algunas reglas para determinar derivadas 101
3.3 La derivada como tasa de variación (o razón de cambio) 111
3.4 Incrementos y diferenciales 121
3.5 La Regla de la Cadena 129
3.6 Derivación implícita 136
3.7 Potencias y derivadas de orden superior 141
3.8 Rapideces de variación relacionadas 147
3.9 El Método de Newton 153
3.10 Repaso 156

4 VALORES EXTREMOS Y ANTIDERIVADAS 161

4.1 Máximos y mínimos locales de las funciones 162
4.2 Teorema de Rolle y Teorema del Valor Medio 169
4.3 Criterio de la primera derivada 175
4.4 Concavidad y criterio de la segunda derivada 183
4.5 Aplicaciones de los máximos y mínimos 194
4.6 Límites al infinito y límites infinitos 205
4.7 Antiderivadas 218
4.8 Repaso 226

5 LA INTEGRAL DEFINIDA 229

5.1 Determinación del área 230
5.2 La integral definida 238
5.3 Propiedades de la integral definida 245
5.4 Teorema Fundamental del Cálculo 251
5.5 Integral indefinida y cambio de variable 260
5.6 Integración numérica 267
5.7 Repaso 275

6 APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA 279

6.1 Área 280
6.2 Sólidos de revolución 289
6.3 Determinación de volúmenes mediante envolventes cilíndricas 297
6.4 Determinación de volúmenes por cortes transversales 301
6.5 Longitud de arco y superficies de revolución 304
6.6 Trabajo 313
6.7 Fuerza ejercida por un líquido 319
6.8 Momentos y centros de masa de una lámina 324
6.9 Otras aplicaciones 332
6.10 Repaso 341

7 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS 345

7.1 Funciones inversas 346
7.2 Función logaritmo natural 350
7.3 Función exponencial natural 359
7.4 Derivación e integración 368
7.5 Funciones logarítmicas y exponenciales generales 374
7.6 Leyes de crecimiento y decrecimiento 382
7.7 Derivadas de las funciones inversas 389
7.8 Repaso 393

8 OTRAS FUNCIONES TRASCENDENTES 395

8.1 Funciones trigonométricas 396
8.2 Límites de las funciones trigonométricas 409
8.3 Derivadas de las funciones trigonométricas 414
8.4 Integrales de las funciones trigonométricas 426
8.5 Funciones trigonométricas inversas 432
8.6 Derivadas e integrales 438
8.7 Funciones hiperbólicas 445
8.8 Funciones hiperbólicas inversas 451
8.9 Repaso 455

9 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN 459

9.1 Integración por partes 460
9.2 Integrales trigonométricas 466
9.3 Sustitución trigonométrica 471
9.4 Integrales de las funciones racionales 476
9.5 Integrales en las que aparecen expresiones cuadráticas 483
9.6 Sustituciones diversas 486
9.7 Tablas de integrales 490
9.8 Repaso 493

10 FORMAS INDETERMINADAS, INTEGRALES IMPROPIAS Y FÓRMULAS DE TAYLOR 495

10.1 Las formas indeterminadas 496
10.2 Otras formas indeterminadas 503
10.3 Integrales con extremos (o límites) de integración infinitos 507
10.4 Integrales con integrandos discontinuos 514
10.5 Fórmula de Taylor 520
10.6 Repaso 529

11 SERIES INFINITAS 531

11.1 Sucesiones infinitas 532
11.2 Series infinitas convergentes o divergentes 544
11.3 Series de términos positivos 554
11.4 Criterios de la Razón y de la Raíz 563
11.5 Series alternantes y convergencia absoluta 566
11.6 Series de potencias 575
11.7 Representación de funciones por series de potencias 581
11.8 Series de Taylor y de Maclaurin 586
11.9 Serie del Binomio 595
11.10 Repaso 599

12 TEMAS SELECTOS DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA 601

12.1 Secciones cónicas 602
12.2 Parábolas 602
12.3 Elipses 611
12.4 Hipérbolas 620
12.5 Rotación de ejes 628
12.6 Repaso 632

13 CURVAS PLANAS Y COORDENADAS POLARES 635

13.1 Curvas planas 636
13.2 Rectas tangentes y longitud de arco 646

13.3 Coordenadas polares 653
13.4 Integrales en coordenadas polares 663
13.5 Ecuaciones polares de las cónicas 669
13.6 Repaso 674

14 VECTORES Y SUPERFICIES 677

14.1 Vectores en dos dimensiones 678
14.2 Vectores en tres dimensiones 689
14.3 Producto escalar 697
14.4 Producto vectorial 705
14.5 Rectas y planos 713
14.6 Superficies 722
14.7 Coordenadas cilíndricas y esféricas 731
14.8 Repaso 735

15 FUNCIONES VECTORIALES 739

15.1 Definiciones y curvas en el espacio 740
15.2 Límites, derivadas e integrales 745
15.3 El movimiento 753
15.4 Curvatura de líneas 761
15.5 Componentes tangencial y normal de la aceleración 771
15.6 Leyes de Kepler 777
15.7 Repaso 782

16 DERIVADAS PARCIALES 785

16.1 Funciones de varias variables 786
16.2 Límites y continuidad 794
16.3 Derivadas parciales 802
16.4 Incrementos y diferenciales 810
16.5 Regla de la Cadena 818
16.6 Derivadas direccionales 828
16.7 Planos tangentes y rectas normales a las superficies 837
16.8 Máximos y mínimos de funciones de varias variables 844
16.9 Multiplicadores de Lagrange 852
16.10 Repaso 860

17 INTEGRALES MÚLTIPLES 863

17.1 Integrales dobles 864
17.2 Evaluación de las integrales dobles 868
17.3 Área y volumen 876
17.4 Integrales dobles en coordenadas polares 882
17.5 Área de una superficie 887
17.6 Integrales triples 890
17.7 Momentos y centro de masa 900
17.8 Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas 908
17.9 Cambio de variables en las integrales múltiples 913
17.10 Repaso 921

18 CÁLCULO VECTORIAL 925

18.1 Campos vectoriales 926
18.2 Integrales de línea 934
18.3 Independencia de la trayectoria 944
18.4 Teorema de Green 953
18.5 Integrales de superficie 961
18.6 Teorema de la divergencia 969
18.7 Teorema de Stokes 976
18.8 Repaso 983

19 ECUACIONES DIFERENCIALES 985

19.1 Ecuaciones diferenciales separables 986
19.2 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden 992
19.3 Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden 999
19.4 Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas 1006
19.5 Vibraciones 1012
19.6 Repaso 1017

APÉNDICES 1021

I Inducción matemática 1022
II Teoremas sobre límites e integrales 1027
III Tablas 1040
IV Tablas de integrales 1042

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE NÚMERO IMPAR 1047

ÍNDICE 1093

CAPÍTULO 1

LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

Este capítulo trata temas necesarios para el estudio del Cálculo. Después de una breve discusión sobre los números reales, los sistemas coordenados y las gráficas en dos dimensiones, se considera uno de los conceptos más importantes de las matemáticas: la noción de ***función****.*

1.1 LOS NÚMEROS REALES

El cálculo se basa en las propiedades de los **números reales.** Si se suma el número real 1 sucesivamente a sí mismo se obtienen los **enteros positivos** 1, 2, 3, 4, ... Los **números enteros** constan de todos los enteros positivos y negativos junto con el número real 0. Frecuentemente se escriben los enteros en una lista como sigue:

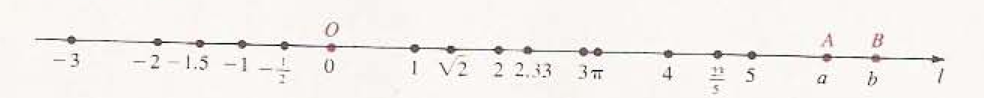
$$\ldots, \quad -4, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots$$

Un **número racional** es un número real que se puede expresar como el cociente a/b de dos números enteros a y b con $b \neq 0$. Los números reales que no son racionales se llaman **irracionales.** Por ejemplo, la razón del perímetro de una circunferencia a su diámetro es un irracional. Este número real se denota por π y se escribe $\pi \approx 3.1416$ para indicar que π es *aproximadamente igual* a 3.1416. Otro ejemplo de un número irracional es $\sqrt{2}$.

Los números reales se pueden representar por *expresiones decimales infinitas.* Por ejemplo, realizando la división puede verse que la representación decimal del número racional 177/55 es 3.2181818..., en donde los dígitos 1 y 8 se repiten indefinidamente. Los números racionales pueden representarse siempre por expresiones decimales *periódicas*, es decir, en las que hay una combinación de dígitos que se repite indefinidamente. Los números irracionales pueden representarse por expresiones decimales infinitas *no periódicas.*

Existe una *correspondencia biunívoca* entre los números reales y los puntos de una recta l, en el sentido de que a cada número real a le corresponde uno y sólo un punto P en l, y viceversa, a cada punto P le corresponde un número real. Para ilustrar esta correspondencia, en la Figura 1.1 se señalan varios puntos que corresponden a números reales. El punto O que corresponde al número real 0 es el **origen.**

FIGURA 1.1



El número a que se asocia a un punto A en l se llama **coordenada** de A. Una asignación de coordenadas a los puntos de l constituye un **sistema coordenado** para l. Una recta que tiene un sistema coordenado se llama **eje coordenado** o **recta numérica real.** A l, supuesto horizontal, se le asigna una dirección tomando el **sentido positivo** hacia la derecha y el **sentido negativo** hacia la izquierda. La dirección positiva se indica trazando una punta de flecha en un extremo de l, como se muestra en la Figura 1.1.

Los números que corresponden a los puntos a la derecha de O en la Figura 1.1 son los **números reales positivos,** mientras que los que corresponden a puntos a la izquierda de O son los **números reales negativos.** El número real 0 no es positivo ni negativo.

Si a y b son números reales y $a - b$ es positivo, se dice que **a es mayor que b** y se escribe $a > b$. Esto es equivalente a decir que **b es menor que a** ($b < a$). Los símbolos $>$ y $<$ se llaman **signos de desigualdad** y expresiones como $a > b$ y $b < a$ se llaman **desigualdades**. Con referencia a la Figura 1.1, si A y B son puntos con coordenadas a y b, respectivamente, entonces $b > a$ (o $a < b$) *si y sólo si A se encuentra a la izquierda de B.* Como $a - 0 = a$, resulta que $a > 0$ si y sólo si a es positivo. Análogamente, $a < 0$ significa que a es negativo. Se pueden demostrar las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES (1.1)

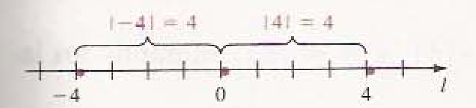
(i) Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.
(ii) Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.
(iii) Si $a > b$, entonces $a - c > b - c$.
(iv) Si $a > b$ y c es positivo, entonces $ac > bc$.
(v) Si $a > b$ y c es negativo, entonces $ac < bc$.

Hay resultados parecidos cuando se invierten los signos de desigualdad. Por ejemplo, si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$; si $a < b$, entonces $a + c < b + c$, etcétera.

La expresión $a \geq$ se lee ***a* es mayor que o igual a *b*** y significa que $a > b$, o bien que $a = b$. La expresión $a < b < c$ significa que $a < b$ y $b < c$, y cuando esto sucede se dice que ***b* está entre *a* y *c***. Las expresiones $a \leq b$, $a < b \leq c$, $a \leq b < c$, $a \leq b \leq c$, etc., se pueden interpretar mediante las definiciones anteriores.

Si un número real a es la coordenada de un punto A sobre una recta coordenada l, para denotar la distancia de A al origen, independientemente del sentido, se utiliza el símbolo $|a|$. El número no negativo $|a|$ se llama *valor absoluto* de a. Con referencia a la Figura 1.2 se ve que para el punto con coordenada -4, se tiene $|-4| = 4$. Análogamente, $|4| = 4$. En general para calcular $|a|$, *si a es negativo hay que cambiar el signo, y si a no es negativo entonces* $|a| = a$. La siguiente definición resume este análisis.

FIGURA 1.2



DEFINICIÓN (1.2)

Sea a un número real. El **valor absoluto** de a se denota por $|a|$ y está dado por

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

EJEMPLO 1 Evaluar $|3|$, $|-3|$, $|0|$, $|\sqrt{2} - 2|$, y $|2 - \sqrt{2}|$.

Solución Puesto que 3, $2 - \sqrt{2}$ y 0 no son negativos,

$$|3| = 3, \quad |2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}, \quad \text{y} \quad |0| = 0.$$

Como -3 y $\sqrt{2} - 2$ son negativos, usamos la fórmula $|a| = -a$ y así

$$|-3| = -(-3) = 3 \quad \text{y} \quad |\sqrt{2} - 2| = -(\sqrt{2} - 2) = 2 - \sqrt{2}.$$

Se puede demostrar que para todos los números reales a y b,

$$|a| = |-a|, \quad |ab| = |a||b|, \quad -|a| \leq a \leq |a|.$$

También es posible demostrar las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DE LOS VALORES ABSOLUTOS (1.3)

Sea b un número real positivo. Entonces

(i) $|a| < b$ si y sólo si $-b < a < b$.
(ii) $|a| > b$ si y sólo si $a > b$ o bien $a < -b$.
(iii) $|a| = b$ si y sólo si $a = b$ o bien $a = -b$.

Las propiedades (ii) y (iii) también se cumplen cuando $b = 0$. Por tanto, si $b \geq 0$, entonces

$$|a| \leq b \quad \text{si y sólo si} \quad -b \leq a \leq b$$

y

$$|a| \geq b \quad \text{si y sólo si} \quad a \geq b \ \text{ o bien } \ a \leq -b.$$

LA DESIGUALDAD DEL TRIÁNGULO (1.4)

$$|a + b| \leq |a| \pm |b|.$$

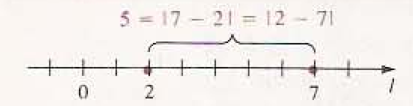
Demostración Es claro que $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$. Sumando los lados correspondientes se obtiene

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Aplicando el comentario anterior a este teorema se obtiene la Desigualdad del Triángulo. • •

A continuación se usarán valores absolutos para definir la distancia entre cualquier par de puntos sobre una recta coordenada. Nótese que la distancia entre los puntos de l con coordenadas 2 y 7 que se muestran en la Figura 1.3 es igual a 5 unidades. Esta distancia es la diferencia entre las coordenadas, $7 - 2$, que se obtiene restando la menor de la mayor. Si se usan valores absolutos el orden no importa, pues $|7 - 2| = |2 - 7|$.

FIGURA 1.3



DEFINICIÓN (1.5)

Sean A y B dos puntos sobre una recta coordenada l, y a y b sus coordenadas respectivas. La **distancia entre A y B** se denota por $d(A, B)$ y está dada por

$$d(A, B) = |b - a|$$

El número $d(A, B)$ denota la **longitud del segmento AB.** Obsérvese que, como $d(B, A) = |a - b|$ y $|b - a| = |a - b|$,

$$d(A, B) = d(B, A).$$

Nótese también que la distancia entre el origen O y el punto A es

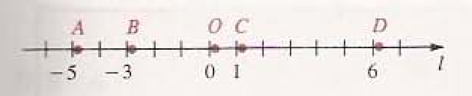
$$d(O, A) = |a - 0| = |a|$$

que coincide con la interpretación geométrica del valor absoluto ilustrada en la Figura 1.2. La fórmula $d(A, B) = |b - a|$ es válida independientemente de los signos de a y b, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Sean A, B, C y D puntos con coordenadas -5, -3, 1 y 6, respectivamente. Calcular $d(A, B)$, $d(C, B)$, $d(O, A)$ y $d(C, D)$.



FIGURA 1.4



Solución Los puntos están representados en la Figura 1.4. Por la Definición (1.5):

$$d(A, B) = |-3 - (-5)| = |-3 + 5| = |2| = 2$$
$$d(C, B) = |-3 - 1| = |-4| = 4$$
$$d(O, A) = |-5 - 0| = |-5| = 5$$
$$d(C, D) = |6 - 1| = |5| = 5$$

A veces, como por ejemplo al estudiar las desigualdades, es conveniente usar la notación y la terminología de los *conjuntos*. Se puede pensar en un **conjunto** como una colección de objetos de algún tipo. Los objetos son los **elementos** del conjunto. En este libro se denota el conjunto de los números reales por $\mathbb{R}$. Si S es un conjunto, entonces $a \in S$ significa que a es un elemento de S y $a \notin S$ significa que a no es un elemento de S. Si todo elemento de un conjunto S es también un elemento de un conjunto T entonces se dice que S es un **subconjunto** de T. Sean S y T dos conjuntos. Se dice que S y T son **iguales** y se escribe $S = T$, si S y T tienen exactamente los mismos elementos. Para indicar que S y T no son iguales se escribe $S \neq T$. La **unión** $S \cup T$ de S y T es un conjunto que consta de todos los elementos que están en S o en T, o en S y T *a la vez*. La **intersección** $S \cap T$ consta de todos los elementos que ambos conjuntos tienen en común.

Para representar elementos arbitrarios de un conjunto se usan frecuentemente letras. Por ejemplo, a veces se usa x para denotar un número real cuando no se desea especificar ningún número real en *particular*. Una letra que se usa para representar *cualquier* elemento de un conjunto dado se llama **variable**. Un símbolo que representa un elemento *específico* es una **constante**. En este libro, como en muchos otros, se usan las últimas letras del alfabeto, como x, y y z, para representar variables. Las letras como a, b y c denotan constantes. A lo largo de todo el texto las variables representan números reales, a menos que se especifique lo contrario.

El **dominio de una variable** es el conjunto de los números reales que la variable representa. Por ejemplo, $\sqrt{x}$ es un número real si y sólo si $x \geq 0$ y, por lo tanto, el dominio de x es el conjunto de los números reales no negativos. Análogamente, al considerar la expresión $1/(x - 2)$ se debe excluir $x = 2$ para evitar la división entre cero. En este caso el dominio es el conjunto de todos los números reales diferentes de 2.

Si los elementos de un conjunto S son los que tienen alguna propiedad, se puede escribir $S = \{x: \quad\}$, enunciando la propiedad que describe a la variable x en el espacio después de los dos puntos. Por ejemplo, $\{x: x > 3\}$ denota el conjunto de todos los números reales mayores que 3. A veces, los conjuntos finitos se definen enunciando la lista de todos sus elementos puestos entre llaves. Por ejemplo, si el conjunto T consta de los primeros cinco enteros positivos, se puede escribir $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}$ llamados **intervalos**, son muy importantes en el cálculo. Si $a < b$, el conjunto de todos los números reales entre a y b es un **intervalo abierto** y se denota por (a, b), como en la siguiente definición.

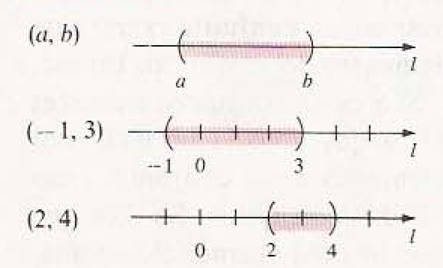
INTERVALO ABIERTO (1.6)

$$(a, b) = \{x: a < x < b\}$$

Los números a y b se llaman **extremos** del intervalo.

La **gráfica** de un conjunto de números reales consta de los puntos sobre una recta coordenada que corresponden a los números del conjunto. En particular, la gráfica del intervalo abierto (a, b) consta de todos los puntos entre los dos que corresponden a a y b. En la Figura 1.5 aparecen representaciones de las gráficas de un intervalo abierto general (a, b) y dos intervalos abiertos específicos $(-1, 3)$ y $(2, 4)$. Los paréntesis en las gráficas indican que los extremos de los intervalos no están incluidos. Por conveniencia, no haremos distinción entre *intervalo* y *gráfica de un intervalo*.

FIGURA 1.5

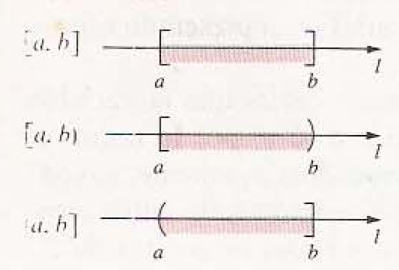


Para indicar que un extremo de un intervalo queda incluido en él, se utiliza un corchete en lugar de paréntesis (re-(redondo). Si $a < b$, entonces el **intervalo cerrado** $[a, b]$ y los **intervalos semiabiertos** $[a, b)$ o bien $(a, b]$, se definen como sigue.

INTERVALOS CERRADOS Y SEMIABIERTOS (1.7)

$$[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\}$$
$$[a, b) = \{x: a \leq x < b\}$$
$$(a, b] = \{x: a < x \leq b\}$$

FIGURA 1.6



En la Figura 1.6 aparecen algunas gráficas típicas de este tipo de intervalos. La presencia de un corchete indica que el extremo correspondiente es parte de la gráfica.

En adelante, al hablar de intervalos, cuando los números a y b no se definan explícitamente, se sobreentiende que $a < b$. Si un intervalo es un subconjunto de otro intervalo I, se dice que es un **subintervalo** de I. Por ejemplo, el intervalo cerrado $[2, 3]$ es un subintervalo de $[0, 5]$.

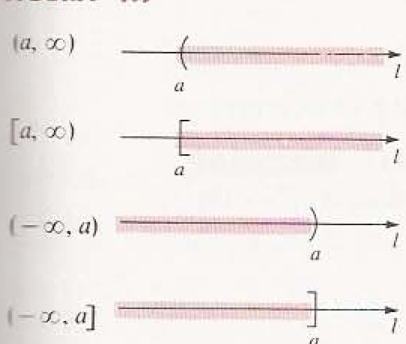
Para **intervalos infinitos** se usa la siguiente notación.

INTERVALOS INFINITOS (1.8)

$$(a, \infty) = \{x: x > a\}$$
$$[a, \infty) = \{x: x \geq a\}$$
$$(-\infty, a) = \{x: x < a\}$$
$$(-\infty, a] = \{x: x \leq a\}$$

Por ejemplo, $(1, \infty)$ representa todos los números reales mayores que 1. El símbolo ∞ se lee *infinito* y no es un número real sino solamente un medio de notación. En la Figura 1.7 aparecen unas gráficas típicas de intervalos infinitos en los que a es un número real arbitrario. La ausencia de un signo de paréntesis o corchete como marca en un extremo de intervalo indica que la gráfica se extiende indefinidamente. A veces el conjunto de los números reales se denota por $(-\infty, \infty)$.

FIGURA 1.7



Con frecuencia se consideran desigualdades en las que intervienen variables, como por ejemplo,

$$x^2 - 3 < 2x + 4.$$

Si se sustituye x en $x^2 - 3 < 2x + 4$ por los números 4 o 5, se obtienen las desigualdades falsas $13 < 12$ o bien $22 < 14$, respectivamente. Otros números como 1 o 2 llevan a desigualdades verdaderas: $-2 < 6$ o bien $1 < 8$, respectivamente. Si al sustituir x por un número real a se obtiene una desigualdad verdadera, entonces se dice que a es una **solución** de la desigualdad. Así, 1 y 2 son soluciones de la desigualdad $x^2 - 3 < 2x + 4$, pero 4 y 5 no lo son. **Resolver** una desigualdad significa encontrar todas sus soluciones. Se dice que dos desigualdades son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones.

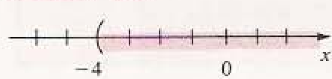
Para resolver una desigualdad, se escribe una lista de desigualdades equivalentes que termina en una para la cual las soluciones son evidentes. Los medios que más se usan al aplicar este método son las propiedades de las desigualdades y del valor absoluto. Por ejemplo, si se suma una misma expresión a ambos lados de la desigualdad se obtiene una desigualdad equivalente. Pueden multiplicarse ambos miembros por una expresión positiva y obtener también una desigualdad equivalente. Si la expresión contiene a x debe verificarse que es positiva para todos los valores de x que se estén considerando. Si se multiplican ambos lados de una desigualdad por una expresión que es siempre negativa como $-7 - x^2$, se debe invertir el signo de la desigualdad para establecer una desigualdad equivalente.

EJEMPLO 3 Resolver la desigualdad $4x + 3 > 2x - 5$ y representar gráficamente las soluciones.

Solución Las siguientes desigualdades son equivalentes (justifíquese cada paso):

$$4x + 3 > 2x - 5$$
$$4x > 2x - 8$$
$$2x > -8$$
$$x > -4$$

FIGURA 1.8



Por lo tanto, las soluciones son todos los números reales mayores que −4, es decir, los números del intervalo infinito $(-4, \infty)$. La gráfica aparece en la Figura 1.8. •

EJEMPLO 4 Resolver la desigualdad $-5 \leq \dfrac{4-3x}{2} < 1$ y graficar las soluciones.

Solución Podemos proceder como sigue:

$$-5 \leq \frac{4-3x}{2} < 1$$
$$-10 \leq 4 - 3x < 2$$
$$-14 \leq -3x < -2$$
$$\frac{14}{3} \geq x > \frac{2}{3}$$
$$\frac{2}{3} < x \leq \frac{14}{3}$$

FIGURA 1.9

Por lo tanto, las soluciones son los números del intervalo semiabierto $(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}]$. La gráfica aparece en la Figura 1.9. •

EJEMPLO 5 Resolver $x^2 - 7x + 10 > 0$ y representar gráficamente las soluciones.

Solución Como la desigualdad se puede escribir

$$(x-5)(x-2) > 0,$$

resulta que x es una solución si y sólo si los factores $x - 5$ y $x - 2$ son ambos positivos o ambos negativos. El diagrama de la Figura 1.10 muestra el signo de cada uno de estos factores para varios números reales. Claramente, ambos factores son positivos si x está en el intervalo $(5, \infty)$ y ambos son negativos si x está en $(-\infty, 2)$. Como se ilustra en la Figura 1.10, las soluciones son todos los números reales en la unión $(-\infty, 2) \cup (5, \infty)$. •

FIGURA 1.10



EJEMPLO 6 Resolver la desigualdad $|x - 3| < 0.1$.

Solución Usando (1.3) (i) y (1.1) (ii), vemos que la desigualdad es equivalente a cada una de las siguientes:

$$-0.1 < x - 3 < 0.1$$
$$-0.1 + 3 < (x - 3) + 3 < 0.1 + 3$$
$$2.9 < x < 3.1$$

Entonces las soluciones son los números reales en el intervalo abierto (2.9,3.1). •

En la Sección 2.3 se usarán desigualdades parecidas a la del Ejemplo 6 para definir el concepto de *límite*. Más específicamente, se considerarán desigualdades como las del siguiente ejemplo. La letra griega δ (delta) que aparece en el Ejemplo 7 se emplea frecuentemente en cálculo para denotar un número real positivo pequeño.

EJEMPLO 7 Sean a y δ dos números reales, con $\delta > 0$. Resolver la desigualdad

$$0 < |x - a| < \delta$$

y representar gráficamente las soluciones.

Solución La desigualdad $0 < |x - a|$ se satisface si y sólo si $x \neq a$. Pueden encontrarse las soluciones de $|x - a| < \delta$ usando (1.3)(i) y (1.1)(ii) como sigue:

$$|x - a| < \delta$$
$$-\delta < x - a < \delta$$
$$a - \delta < x < a + \delta$$

Por lo tanto, las soluciones de $0 < |x - a| < \delta$ son todos los números reales en el intervalo abierto $(a - \delta,\ a + \delta)$ *excepto* el número a. Este conjunto es la unión

$$(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$$

de dos intervalos abiertos. La gráfica se ilustra en la Figura 1.11. •

FIGURA 1.11

EJEMPLO 8 Resolver $|2x - 7| > 3$.

Solución Por (1.3)(ii), x es solución de $|2x - 7| > 3$ si y sólo si

$$2x - 7 > 3 \quad \text{o bien} \quad 2x - 7 < -3.$$

La primera de estas dos desigualdades es equivalente a $2x > 10$, o bien $x > 5$. La segunda es equivalente a $2x < 4$, o bien $x < 2$. Por lo tanto, las soluciones de $|2x - 7| > 3$ son los números en la unión $(-\infty, 2) \cup (5, \infty)$. La gráfica es idéntica a la de la Figura 1.10. •

EJERCICIOS 1.1

Ejercicios 1-2: Sustituya el símbolo □ por $<$, $>$ o $=$.

1. (a) $-2 \square -5$ (b) $-2 \square 5$ (c) $6 - 1 \square 2 + 3$
(d) $\frac{2}{3} \square 0.66$ (e) $2 \square \sqrt{4}$ (f) $\pi \square \frac{22}{7}$

2. (a) $-3 \square 0$ (b) $-8 \square -3$ (c) $8 \square -3$
(d) $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \square \frac{1}{15}$ (e) $\sqrt{2} \square 1.4$ (f) $\frac{4053}{1110} \square 3.6513$

Ejercicios 3-4: Escriba la expresión dada sin usar el valor absoluto.

3. (a) $|2 - 5|$ (b) $|-5| + |-2|$
(c) $|5| + |-2|$ (d) $|-5| - |-2|$
(e) $|\pi - \frac{22}{7}|$ (f) $(-2)/|-2|$
(g) $|\frac{1}{2} - 0.5|$ (h) $|(-3)^2|$
(i) $|5 - x|$ donde $x > 5$
(j) $|a - b|$ donde $a < b$

4. (a) $|4 - 8|$ (b) $|3 - \pi|$
(c) $|-4| - |-8|$ (d) $|-4 + 8|$
(e) $|-3|^2$ (f) $|2 - \sqrt{4}|$
(g) $|-0.67|$ (h) $-|-3|$
(i) $|x^2 + 1|$ (j) $|-4 - x^2|$

5. Sean A, B y C tres puntos de una recta coordenada y sean -5, -1 y 7 sus coordenadas respectivas. Calcule las siguientes distancias:
(a) $d(A, B)$ (b) $d(B, C)$ (c) $d(C, B)$ (d) $d(A, C)$

6. Repita el Ejercicio 5 suponiendo que A, B y C tienen coordenadas 2, -8 y -3, respectivamente.

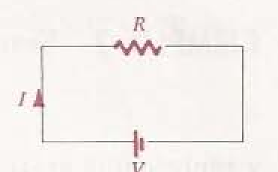
Ejercicios 7-34: Resuelva la desigualdad y exprese la solución en términos de intervalos.

7. $5x - 6 > 11$
8. $3x - 5 < 10$
9. $2 - 7x \leq 16$
10. $7 - 2x \geq -3$
11. $|2x + 1| > 5$
12. $|x + 2| < 1$
13. $3x + 2 < 5x - 8$
14. $2 + 7x < 3x - 10$
15. $12 \geq 5x - 3 > -7$
16. $5 > 2 - 9x > -4$
17. $-1 < \dfrac{3 - 7x}{4} \leq 6$
18. $0 \leq 4x - 1 \leq 2$
19. $\dfrac{5}{7 - 2x} > 0$
20. $\dfrac{4}{x^2 + 9} > 0$
21. $|x - 10| < 0.3$
22. $\left|\dfrac{2x + 3}{5}\right| < 2$
23. $\left|\dfrac{7 - 3x}{2}\right| \leq 1$
24. $|3 - 11x| \geq 41$
25. $|25x - 8| > 7$
26. $|2x + 1| < 0$
27. $3x^2 + 5x - 2 < 0$
28. $2x^2 - 9x + 7 < 0$
29. $2x^2 + 9x + 4 \geq 0$
30. $x^2 - 10x \leq 200$
31. $\dfrac{1}{x^2} < 100$
32. $5 + \sqrt{x} < 1$
33. $\dfrac{3x + 2}{2x - 7} \leq 0$
34. $\dfrac{3}{x - 9} > \dfrac{2}{x + 2}$

35. La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit y Celsius está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Exprese los valores de C correspondientes a $60 \leq F \leq 80$ por medio de una desigualdad.

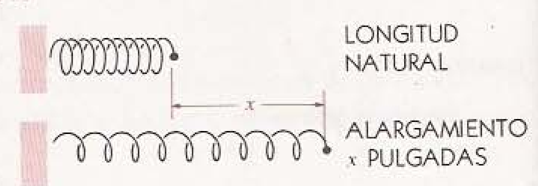
36. Para el circuito eléctrico que se muestra en la figura, la ley de Ohm afirma que $I = V/R$, donde R es la resistencia (en ohms, Ω), V es la diferencia de potencial (en volts, V) e I es la corriente (en amperes, A). Si la tensión es de 110 V, ¿qué valores de la resistencia producen una corriente que no excede de 10 A?

EJERCICIO 36



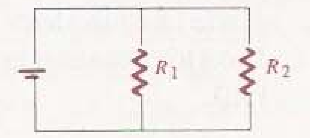
37. De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza F (en newtons, N) que se requiere para estirar un resorte x centímetros a partir de su longitud natural, está dada por la fórmula $F = (4.5)x$ (véase la figura). ¿Cuáles son los valores del alargamiento x correspondientes a $10 \leq F \leq 18$?

EJERCICIO 37



38. Si en un circuito eléctrico se conectan dos resistores R_1 y R_2 en paralelo, la resistencia neta R está dada por $1/R = (1/R_1) + (1/R_2)$ (véase la figura). Si $R_1 = 10$ ohms (Ω), ¿qué valores de R_2 dan por resultado una resistencia neta de menos de $5\,\Omega$?

EJERCICIO 38

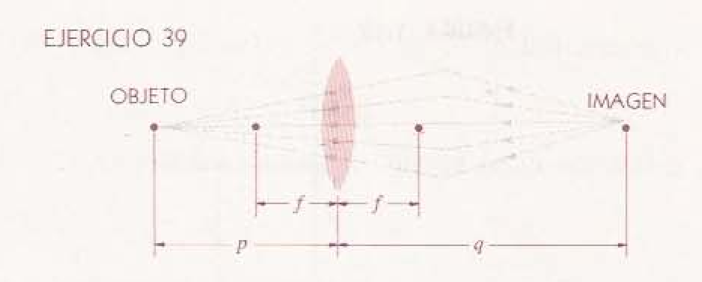


39. Una lente convexa tiene distancia focal $f = 5$ cm. Si un objeto se coloca a una distancia de p centímetros de la lente y la distancia de la lente a la imagen es q centímetros, entonces p, q y f están relacionados por la *ecuación de las lentes* $(1/p)$ +

$(1/q) = 1/f$ (véase la figura). ¿A qué distancia de la lente debe colocarse el objeto para que la imagen esté a más de 12 cm de aquélla?

40. Para cierto gas, la ley de Boyle afirma que $pv = 200$, donde p denota la presión (en N/cm^2) y v el volumen (en cm^3). Si $25 \leq v \leq 50$, ¿cuáles son los valores correspondientes de p?

EJERCICIO 39



1.2 SISTEMAS DE COORDENADAS EN DOS DIMENSIONES

En la Sección 1.1 se presentó un método para asignar coordenadas a los puntos de una recta. También se puede introducir un sistema coordenado para un plano por medio de *pares ordenados*. La expresión **par ordenado** designa a dos números reales de los cuales uno es el ''primero'' y el otro el ''segundo''. El símbolo (a, b) denota al par ordenado que consta de los números reales a y b, donde a es el primero y b es el segundo. Los pares ordenados tienen muchas aplicaciones. En la Sección 1.1 se usaron para denotar intervalos abiertos. En esta sección representarán puntos en el plano. Aunque se usen los pares ordenados en diferentes situaciones, es poco probable que se confundan sus significados ya que siempre debe quedar claro por el contexto si el símbolo (a, b) representa un intervalo, un punto o algún otro concepto matemático. Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son **iguales**, y se escribe

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{si y sólo si} \quad a = c \quad \text{y} \quad b = d.$$

En particular esto implica que $(a, b) \neq (b, a)$ si $a \neq b$. El conjunto de todos los pares ordenados se denota por $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Se puede definir un **sistema coordenado rectangular** o **cartesiano*** en el plano considerando en él dos rectas coordenadas perpendiculares que se cortan o intersecan en el origen O de ambas. A menos que se especifique lo contrario, en cada recta se elige la misma unidad de longitud. Se acostumbra colocar una de las rectas en dirección horizontal con el sentido positivo a la derecha, y la otra, vertical con el sentido positivo hacia arriba, como se indica con las puntas de flecha en la Figura 1.12. Las dos rectas se denominan los **ejes coordenados** y el punto O es el **origen**. La recta horizontal se suele llamar **eje** x y la recta vertical **eje** y, lo cual se indica escribiendo una x y una y, respectivamente, junto a las puntas de los ejes. Entonces tal plano es un **plano coordenado** xy. En ciertas aplicaciones se usan otros nombres, por ejemplo s y t, para los ejes coordenados y se hace referencia al sistema usando esas denominaciones, por ejemplo plano st. Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro partes llamadas el **primero**, **segundo**, **tercero** y **cuarto cuadrantes** que se denotan por I, II, III y IV, respectivamente (véase la Figura 1.12).

* El nombre *cartesiano* se emplea en honor del matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650), quien fue uno de los primeros en emplear estos sistemas de coordenadas.

FIGURA 1.12

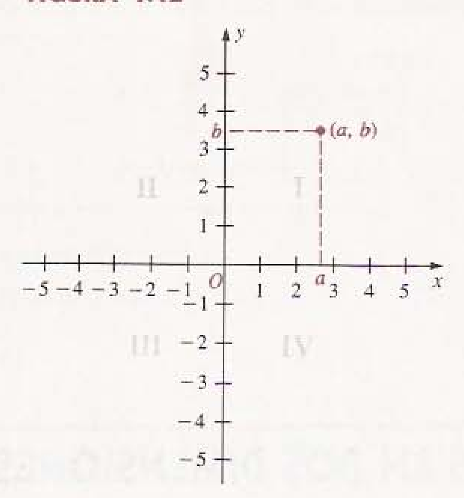
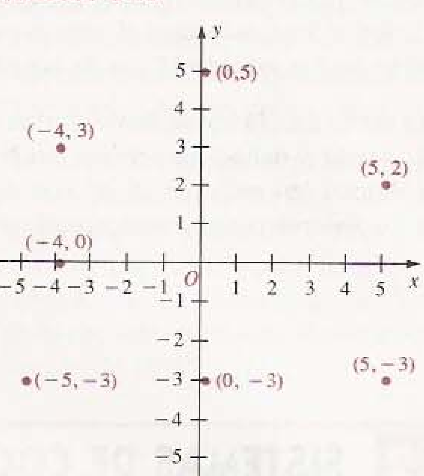


FIGURA 1.13



A cada punto P en el plano xy se le puede asignar un par ordenado único (a, b), como se muestra en la Figura 1.12. El número a es la **abscisa** (o **coordenada** x) de P, y b es su **ordenada** (o **coordenada** y). Se dice que P *tiene las coordenadas* (a, b). Recíprocamente, todo par ordenado (a, b) determina un punto P en el plano xy con coordenadas a y b. A veces se habla del *punto* (a, b), o $P(a, b)$ para indicar el punto P con abscisa a y ordenada b. Para **trazar un punto** $P(a, b)$ se localiza en un plano coordenado y se representa por un pequeño círculo, como se ilustra para varios puntos en la Figura 1.13.

El siguiente enunciado proporciona una fórmula para calcular la distancia entre dos puntos en un plano coordenado.

FÓRMULA DE LA DISTANCIA (1.9)

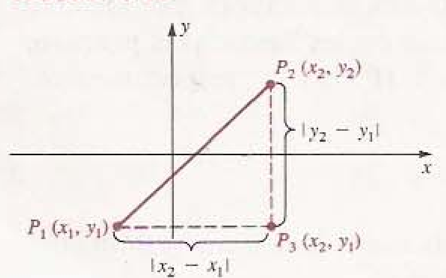
La distancia $d(P_1, P_2)$ entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en un plano coordenado es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Demostración Si $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$, entonces, como se ilustra en la Figura 1.14, los puntos P_1, P_2 y $P_3(x_2, y_1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. Por el Teorema de Pitágoras,

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [d(P_1, P_3)]^2 + [d(P_3, P_2)]^2.$$

FIGURA 1.14



De la figura se ve que

$$d(P_1, P_3) = |x_2 - x_1| \quad \text{y} \quad d(P_3, P_2) = |y_2 - y_1|.$$

Como $|a|^2 = a^2$ para todo número real a, se puede escribir

$$[d(P_1, P_2)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Tomando la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación se obtiene la Fórmula de la Distancia.

Si $y_1 = y_2$, los puntos P_1 y P_2 se encuentran sobre la misma recta horizontal y

$$d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

Análogamente, si $x_1 = x_2$, los puntos se encuentran sobre la misma recta vertical y

$$d(P_1, P_2) = |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2}.$$

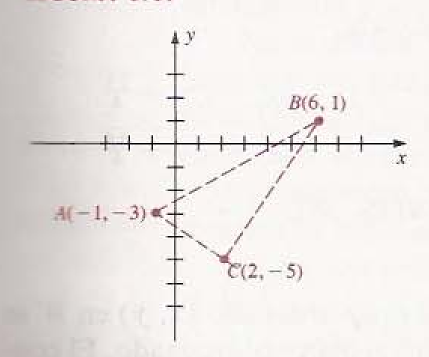
Estos son dos casos especiales de la Fórmula de la Distancia.

Aunque en la demostración se hizo referencia a los puntos de la Figura 1.14, el razonamiento es independiente de las posiciones de P_1 y P_2. • •

Conviene notar que $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$, por lo que al aplicar la Fórmula de la Distancia no importa el orden en el que se restan las abscisas y las ordenadas del punto.

EJEMPLO 1 Situar los puntos $A(-1, -3)$, $B(6, 1)$ y $C(2, -5)$. Demostrar que el triángulo con vértices A, B y C es un triángulo rectángulo y calcular su área.

FIGURA 1.15



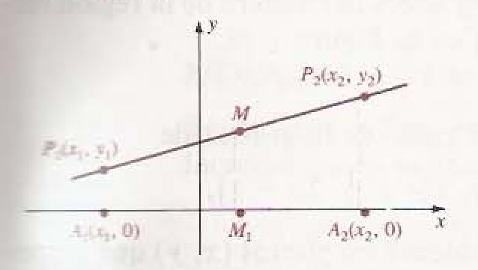
Solución Los puntos y el triángulo se tienen en la Figura 1.15. Por la geometría plana sabemos que un triángulo es rectángulo si y sólo si la suma de los cuadrados de dos de sus lados es igual al cuadrado del tercer lado. Usando la Fórmula de la Distancia,

$$d(A, B) = \sqrt{(-1-6)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$$
$$d(B, C) = \sqrt{(6-2)^2 + (1+5)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$$
$$d(A, C) = \sqrt{(-1-2)^2 + (-3+5)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Como $[d(A, B)]^2 = [d(B, C)]^2 + [d(A, C)]^2$, el triángulo es un rectángulo con hipotenusa AB. El área es $\frac{1}{2}\sqrt{52}\sqrt{13} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13}\sqrt{13}$, o sea 13 unidades cuadradas. •

Es fácil obtener una fórmula para el punto medio de un segmento. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos en un plano coordenado y sea M el punto medio del segmento P_1P_2. Las rectas paralelas al eje y que pasan por P_1 y P_2 cortan al eje x en $A_1(x_1, 0)$ y $A_2(x_2, 0)$. De la geometría plana se sabe que la recta paralela al eje y que pasa por M biseca el segmento A_1A_2 (véase la Figura 1.16). Si $x_1 < x_2$, entonces $x_2 - x_1 > 0$, y por tanto $d(A_1, A_2) = x_2 - x_1$. Como M_1 es el punto medio entre A_1 y A_2, la abscisa de M_1 es

FIGURA 1.16



$$x_1 + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_1 = \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2$$
$$= \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Resulta que la abscisa de M también es $(x_1 + x_2)/2$. Análogamente, la ordenada de M es $(y_1 + y_2)/2$. Estas fórmulas son válidas para todas las posiciones de P_1 y P_2, por lo que se tiene el siguiente resultado.

FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO (1.10)

El punto medio del segmento entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

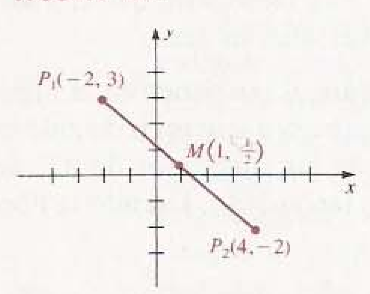
EJEMPLO 2 Encontrar el punto medio M del segmento entre $P_1(-2, 3)$ y $P_2(4, -2)$. Situar los puntos P_1, P_2 y M y verificar que

$$d(P_1, M) = d(P_2, M).$$

Solución Por la Fórmula del Punto Medio, las coordenadas de M son

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+(-2)}{2}\right) \text{ o bien } \left(1, \frac{1}{2}\right).$$

FIGURA 1.17



En la Figura 1.17 se presentan los puntos P_1, P_2 y M. Aplicando la Fórmula de la Distancia,

$$d(P_1, M) = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-\tfrac{1}{2})^2} = \sqrt{9 + \tfrac{25}{4}}$$
$$d(P_2, M) = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-\tfrac{1}{2})^2} = \sqrt{9 + \tfrac{25}{4}}$$

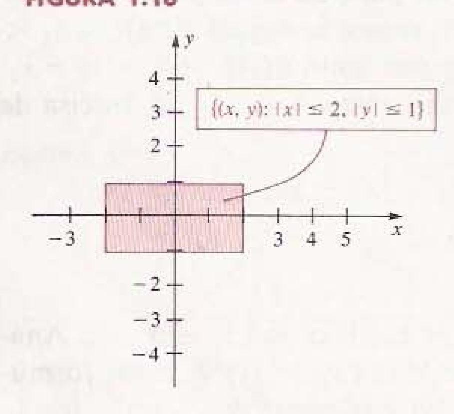
Por lo tanto, $d(P_1, M) = d(P_2, M)$. •

Si W es un conjunto de pares ordenados, para cada par ordenado (x, y) en W se puede considerar el punto $P(x, y)$ que le corresponde en un plano coordenado. El conjunto de todos esos puntos se llama **gráfica** de W. Para *trazar la gráfica de* W, se ilustran geométricamente las características más significativas de la gráfica representándolas en un plano coordenado.

EJEMPLO 3 Efectúe el trazo de la gráfica de

$$W = \{(x, y): |x| \leq 2, |y| \leq 1\}.$$

FIGURA 1.18



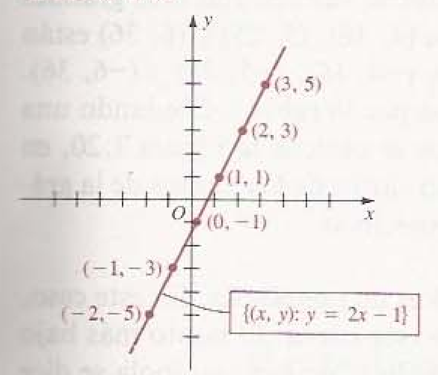
Solución Las desigualdades son equivalentes a $-2 \leq x \leq 2$ y $-1 \leq y \leq 1$. Por lo tanto, la gráfica consta de todos los puntos dentro de y sobre la frontera de la región rectangular que se muestra en la Figura 1.18. •

EJEMPLO 4 Realice el trazo de la gráfica de

$$W = \{(x, y): y = 2x - 1\}.$$

Solución Se desea obtener los puntos (x, y) que corresponden a los pares ordenados (x, y) en W. Es conveniente hacer una lista de las coordenadas de varios de estos puntos

FIGURA 1.19



y escribirla en forma de tabla. Para cada x obtenemos el valor de y por la fórmula $y = 2x - 1$:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	-3	-1	1	3	5

Si se sitúan los puntos con estas coordenadas vemos que todos parecen estar sobre una recta y trazamos la gráfica de acuerdo con esto (véase la Figura 1.19). En general, no bastan tan pocos puntos para obtener una gráfica, sin embargo en este caso elemental son suficientes para indicar que la gráfica es una línea recta. En la Sección 1.3 se demuestra que efectivamente lo es.

Las abscisas de los puntos en que la gráfica corta al eje x se llaman **intercepciones** x de la gráfica. Las ordenadas de los puntos en que la gráfica corta al eje y son las **intercepciones** y. La gráfica de la Figura 1.19 tiene una intercepción x igual a $\frac{1}{2}$ y una intercepción y igual a -1.

No es posible tener la gráfica completa en el Ejemplo 4 pues se pueden asignar valores a x tan grandes como se desee. A pesar de esto, a una representación como la de la Figura 1.19 se la llama *gráfica de W*, o un *croquis* de la gráfica. Se entiende que el trazado es solamente un medio para visualizar la verdadera gráfica y que la recta no termina como parece hacerlo en la figura. En general, el croquis de una gráfica debe mostrar lo suficiente de ella para que las partes restantes resulten evidentes.

Dada una ecuación en x y y, se dice que un par ordenado (a, b) es una **solución** de la ecuación si al sustituir x por a y y por b se obtiene una igualdad. Por ejemplo, $(2, 3)$ es solución de $y = 2x - 1$ porque al sustituir x por 2 y y por 3 se obtiene $3 = 4 - 1$, o sea $3 = 3$. Se dice que dos ecuaciones en x y y son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones. Las soluciones de una ecuación en x y y determinan un conjunto W de pares ordenados. La **gráfica de la ecuación en x y y** se define como la gráfica de W. Nótese que la gráfica de la ecuación $y = 2x - 1$ es la misma que la del conjunto W del Ejemplo 4 (véase la Figura 1.19).

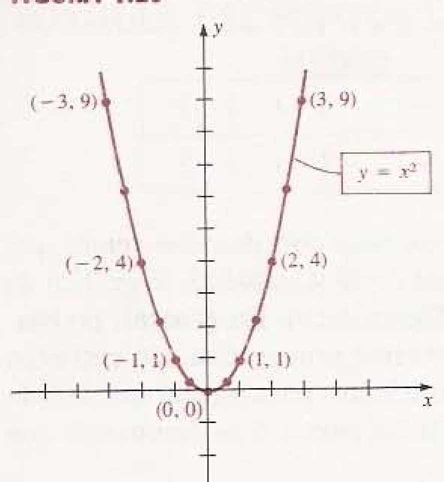
El método que usaremos para trazar la gráfica de algunas de las ecuaciones de este capítulo consiste en situar un número suficiente de puntos hasta que se note cierto patrón y luego se dibuja la gráfica de acuerdo con éste. Evidentemente ésta es una forma burda (y con frecuencia imprecisa) de graficar, pero es el método que se emplea con más frecuencia en los cursos elementales. Al avanzar en el texto se presentarán métodos que permiten trazar o dibujar gráficas precisas sin necesidad de ubicar muchos puntos.

EJEMPLO 5 Trazar la gráfica de la ecuación $y = x^2$.

Solución Para este dibujo hace falta situar más puntos que en el ejemplo anterior. Incrementando la abscisa sucesivamente en $\frac{1}{2}$ obtenemos una tabla de coordenadas:

x	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
y	9	$\frac{25}{4}$	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	9

FIGURA 1.20



Valores mayores de $|x|$ producen valores aún más grandes de y. Por ejemplo, los puntos (4, 16), (5, 25) y (6, 36) están en la gráfica y también están (−4, 16), (−5, 25) y (−6, 36). Localizando los puntos dados por la tabla y dibujando una curva alisada a través de ellos se obtiene la Figura 1.20, en la que además se han marcado varios de los puntos de la gráfica con sus coordenadas respectivas. •

La gráfica del Ejemplo 5 es una **parábola**. En este caso, el eje y coincide con el **eje de esta curva**. El punto más bajo (0, 0) es el **vértice** de la parábola y; de esta parábola se dice que **abre hacia arriba**. Si se invierte la gráfica, lo que corresponde a la ecuación $y = -x^2$, entonces se dice de ella que **abre hacia abajo** y que su vértice (0, 0) es el punto más alto de la curva. En general, la gráfica de cualquier ecuación de la forma $y = ax^2$ con $a \neq 0$ es una parábola con vértice (0, 0). También hay parábolas que abren a la derecha o a la izquierda (véase el Ejemplo 6). Las parábolas y sus propiedades se presentan con detalle en el Capítulo 12, en el que además se demuestra que la gráfica de una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, es una parábola cuyo eje es *paralelo* al eje y.

Si se dobla el plano coordenado de la Figura 1.20 a lo largo del eje y, entonces la gráfica que se encuentra en la mitad izquierda del plano coincide con la que se encuentra en la mitad derecha. Se dice entonces que la **gráfica es simétrica con respecto al eje y**. Una gráfica es simétrica con respecto al eje y si el punto $(-x, y)$ está en la gráfica cada vez que (x, y) está en ésta, como se ve en la Figura 1.21(i). Una **gráfica es simétrica con respecto al eje x** si cada vez que el punto (x, y) está en la gráfica, entonces $(x, -y)$ también lo está, como aparece en la Figura 1.21(ii). Algunas gráficas tienen **simetría con respecto al origen**. Esto sucede si cada vez que el punto (x, y) está en la gráfica, entonces $(-x, -y)$ también lo está, como se ilustra en la Figura 1.21(iii).

Los siguientes criterios son útiles para investigar estos tres tipos de simetría en las gráficas de ecuaciones en x y y.

FIGURA 1.21
Simetrías

(i) Eje y **(ii)** Eje x **(iii)** Origen

CRITERIOS DE SIMETRÍA (1.11)

(i) La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje y si al sustituir x por $-x$ se obtiene una ecuación equivalente.

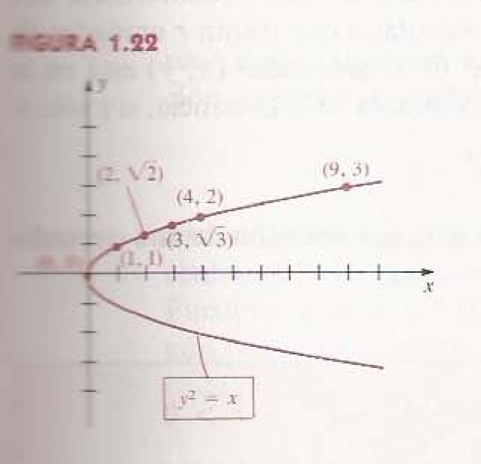
(ii) La grafica de una ecuación es simétrica con respecto al eje x si al sustituir y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente.

(iii) La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al origen si al sustituir simultáneamente x por $-x$ y y por $-y$ resulta una ecuación equivalente.

Si en la ecuación del Ejemplo 5 se sustituye x por $-x$ se obtiene $y = (-x)^2$, que es equivalente a $y = x^2$. Entonces, por el Criterio de Simetría (1.11) (i), la gráfica es simétrica con respecto al eje y.

Si una gráfica es simétrica con respecto a un eje, para trazarla basta su determinación en una mitad del plano coordenado ya que se puede dibujar el resto haciendo una reflexión con respecto al eje de simetría.

FIGURA 1.22



EJEMPLO 6 Trazar la gráfica de la ecuación $y^2 = x$.

Solución Como al sustituir y por $-y$ no cambia la ecuación, la gráfica es simétrica con respecto al eje x [Criterio de Simetría (ii)]. Por tanto, basta localizar puntos con ordenadas no negativas y luego reflejar con respecto al eje x. Como $y^2 = x$, las ordenadas de los puntos arriba del eje x están dadas por $y = \sqrt{x}$. En la siguiente tabla aparecen las coordenadas de varios de los puntos de la gráfica:

x	0	1	2	3	4	9
y	0	1	$\sqrt{2} \approx 1.4$	$\sqrt{3} \approx 1.7$	2	3

En la Figura 1.22 aparece una parte de la gráfica. Se trata de una parábola que abre hacia la derecha y que tiene su vértice en el origen. En este caso el eje de la parábola coincide con el eje x. •

EJEMPLO 7 Trazar la gráfica de la ecuación $4y = x^3$.

Solución Si se sustituye x por $-x$ y y por $-y$ resulta

$$4(-y) = (-x)^3 \quad \text{o bien} \quad -4y = -x^3.$$

Multiplicando ambos lados por -1 se ve que esta última ecuación tiene las mismas soluciones que la ecuación $4y = x^3$. Entonces, por el Criterio de Simetría (iii), resulta que la gráfica es simétrica con respecto al origen. La siguiente tabla es una lista de algunos de los puntos de la gráfica.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
y	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{27}{32}$	2	$\frac{125}{32}$

Por simetría (o por sustitución) vemos que los puntos $(-1, -\frac{1}{4})$, $(-2, -2)$, etc., están en la gráfica. La situación de estos puntos lleva al dibujo en la Figura 1.23. •

FIGURA 1.23

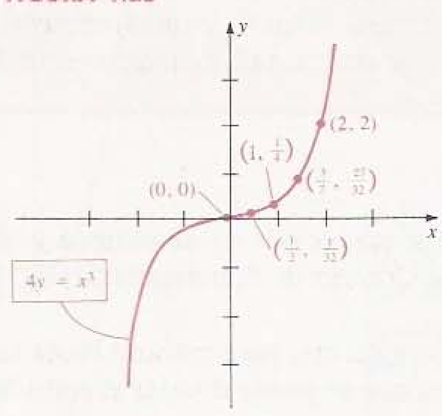
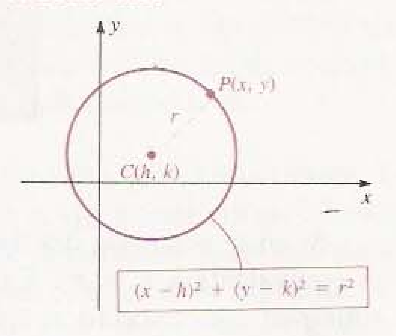


FIGURA 1.24



Si $C(h, k)$ es un punto en un plano coordenado, entonces una circunferencia con centro C y radio $r > 0$ consta de todos los puntos del plano que distan r unidades de C. Como se muestra en la Figura 1.24, un punto P de coordenadas (x, y) está en la circunferencia si y sólo si $d(C, P) = r$, o bien por la Fórmula de la Distancia, si y sólo si

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r.$$

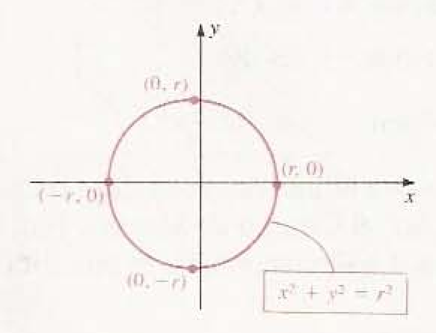
La siguiente ecuación es equivalente a ésta última y se llama **ecuación de una circunferencia de radio r con centro (h, k)**.

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA (1.12)

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2, \qquad r > 0$$

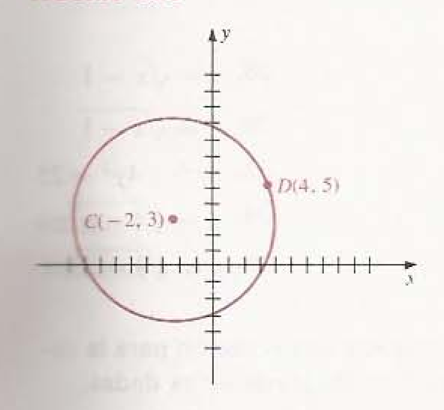
Si $h = 0$ y $k = 0$, la ecuación se reduce a $x^2 + y^2 = r^2$, que es la ecuación de una circunferencia con radio r y centro en el origen (véase la Figura 1.25). Si $r = 1$, la gráfica se llama **circunferencia unitaria**.

FIGURA 1.25



EJEMPLO 8 Encontrar una ecuación para la circunferencia que tiene centro $C(-2, 3)$ y pasa por el punto $D(4, 5)$.

FIGURA 1.26



Solución En la Figura 1.26 aparece un croquis de la circunferencia. Como D está en ella, el radio r es $d(C, D)$. Por la Fórmula de la Distancia,

$$r = \sqrt{(-2-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$$

Usando la ecuación de la circunferencia con $h = -2$, $k = 3$ y $r = \sqrt{40}$, obtenemos

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 40$$

o bien

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 27 = 0. \quad \bullet$$

Desarrollando los cuadrados en $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y simplificando se llega a una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

para ciertos números reales a, b y c. Recíprocamente, partiendo de esta última ecuación, siempre es posible *completar cuadrados* y llegar a una ecuación de la forma

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = d.$$

Este método se ilustra en el Ejemplo 9. Si $d > 0$ la gráfica es una circunferencia con centro (h, k) y radio $r = \sqrt{d}$. Si $d = 0$ la gráfica consta solamente del punto (h, k). Finalmente, si $d < 0$ la ecuación no tiene soluciones reales y por lo tanto, no hay ningún punto en la gráfica.

EJEMPLO 9 Calcular el centro y el radio de la circunferencia con ecuación

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0.$$

Solución Comenzamos por ordenar esta última como sigue:

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = 3.$$

Luego completamos los cuadrados de las expresiones dentro de los paréntesis. Por supuesto, para obtener una ecuación equivalente, hay que sumar números a *ambos* lados de la ecuación. Para completar el cuadrado de una expresión de la forma $x^2 + ax$ debe sumarse el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, es decir, $(b/2)^2$ a ambos lados de la ecuación. Análogamente, para $y^2 + by$, se suma $(b/2)^2$ a ambos lados. En este ejemplo, $a = -4$, $b = 6$, $(a/2)^2 = (-2)^2 = 4$ y $(b/2)^2 = 3^2 = 9$. Esto lleva a

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 3 + 4 + 9$$

o bien

$$(x-2)^2 - (y+3)^2 = 16.$$

Por lo tanto, de acuerdo con (1.12), el centro es $(2, -3)$ y el radio es 4. $\bullet$

EJERCICIOS 1.2

Ejercicios 1-6: (a) Calcule la distancia $d(A, B)$ entre los puntos A y B; (b) determine el punto medio del segmento AB.

1. $A(6, -2)$, $B(2, 1)$
2. $A(-4, -1)$, $B(2, 3)$
3. $A(0, -7)$, $B(-1, -2)$
4. $A(4, 5)$, $B(4, -4)$
5. $A(-3, -2)$, $B(-8, -2)$
6. $A(11, -7)$, $B(-9, 0)$

Ejercicios 7-8: Demuestre que el triángulo con vértices A, B y C es un triángulo rectángulo y calcule su área.

7. $A(-3, 4)$, $B(2, -1)$, $C(9, 6)$
8. $A(7, 2)$, $B(-4, 0)$, $C(4, 6)$

Ejercicios 9-14: Trace la gráfica del conjunto W.

9. $W = \{(x, y): x = 4\}$
10. $W = \{(x, y): y = -3\}$
11. $W = \{(x, y): xy < 0\}$
12. $W = \{(x, y): xy = 0\}$
13. $W = \{(x, y): |x| < 2, |y| > 1\}$
14. $W = \{(x, y): |x| > 1, |y| \leq 2\}$

Ejercicios 15-36: Trace la gráfica de la ecuación y determine las simetrías usando (1.11).

15. $y = 3x + 1$
16. $y = 4x - 3$
17. $y = -2x + 3$
18. $y = 2 - 3x$
19. $y = 2x^2 - 1$
20. $y = -x^2 + 2$
21. $4y = x^2$
22. $3y + x^2 = 0$
23. $y = -\frac{1}{2}x^3$
24. $y = \frac{1}{2}x^3$
25. $y = x^3 - 2$
26. $y = 2 - x^3$
27. $y = \sqrt{x}$
28. $y = \sqrt{x} - 1$
29. $y = \sqrt{-x}$
30. $y = \sqrt{x - 1}$
31. $x^2 + y^2 = 16$
32. $4x^2 + 4y^2 = 25$
33. $y = -\sqrt{4 - x^2}$
34. $x = \sqrt{4 - y^2}$
35. $x = \sqrt{9 - y^2}$
36. $y = \sqrt{9 - x^2}$

Ejercicios 37-44: Encuentre una ecuación para la circunferencia que satisface las condiciones dadas.

37. Centro $C(3, -2)$, radio 4.
38. Centro $C(-5, 2)$, radio 5.
39. Centro en el origen y pasa por $P(-3, 5)$.
40. Centro $C(-4, 6)$, pasa por $P(1, 2)$.
41. Centro $C(-4, 2)$ y es tangente al eje x.
42. Centro $C(3, -5)$ y es tangente al eje y.
43. Los extremos de uno de sus diámetros son $A(4, -3)$ y $B(-2, 7)$.
44. Es tangente a ambos ejes, el centro está en el primer cuadrante y el radio es 2.

Ejercicios 45-50: Determine el centro y el radio de la circunferencia que satisface la ecuación dada.

45. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$
46. $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0$
47. $x^2 + y^2 + 6x = 0$
48. $x^2 + y^2 + x + y - 1 = 0$
49. $2x^2 + 2y^2 - x + y - 3 = 0$
50. $9x^2 + 9y^2 - 6x + 12y - 31 = 0$

1.3 LA RECTA

El siguiente concepto es de importancia fundamental para el estudio de las rectas. Todas las rectas a las que se hará referencia están en un plano coordenado.

DEFINICIÓN (1.13)

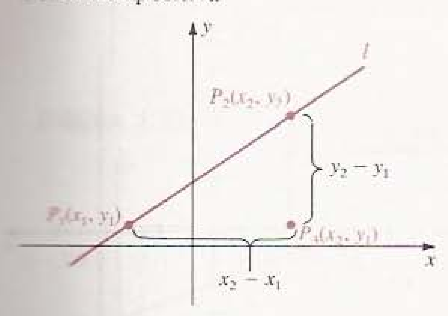
Sea l una recta que no es paralela al eje y, y sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos distintos en l. La **pendiente** m de l es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si l es paralela al eje y entonces su pendiente no está definida.

FIGURA 1.27

Pendiente positiva



En la Figuras 1.27 y 1.28 se muestran unos puntos típicos P_1 y P_2 sobre una recta l. El numerador $y_2 - y_1$ en la fórmula de m es igual al incremento de ordenada (cambio vertical) al ir de P_1 a P_2 y puede ser positivo, negativo o cero. El denominador $x_2 - x_1$, es el incremento de abscisas (cambio horizontal) al ir de P_1 a P_2 y también puede ser positivo o negativo, pero no puede ser cero porque, cuando la pendiente existe, l no puede ser paralela al eje y.

Al calcular la pendiente de una recta no importa cuál de los puntos se llama P_1 y cual P_2 puesto que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Por lo tanto, puede suponerse que los puntos son tales que $x_1 < x_2$, como en las Figuras 1.27 y 1.28. En este caso, $x_2 - x_1 > 0$, y entonces la pendiente es positiva, negativa o cero según $y_2 > y_1$, $y_2 < y_1$, o bien $y_2 = y_1$. La pendiente de la recta que se muestra en la Figura 1.27 es positiva. La pendiente de la recta que se muestra en la Figura 1.28 es negativa.

FIGURA 1.28

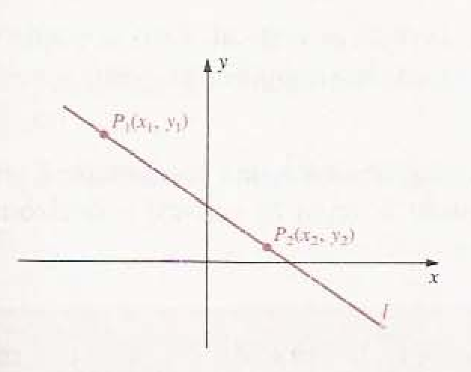
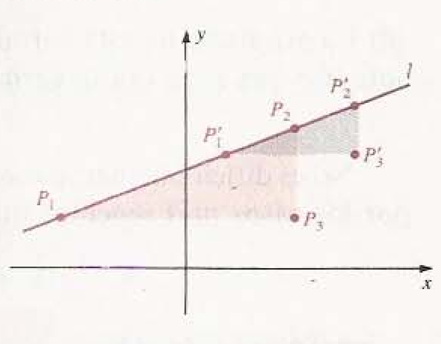


FIGURA 1.29



Una **recta horizontal** es una recta paralela al eje x. Nótese que *una recta es horizontal si y sólo si su pendiente es cero*. Una **recta vertical** es una paralela al eje y. La pendiente de una recta vertical no está definida.

El valor de la pendiente no depende de los dos puntos que se elijan sobre l para calcularla. Si se usan otros puntos $P'_1(x'_1, y'_1)$ y $P'_2(x'_2, y'_2)$, entonces el triángulo con vértices P'_1, P'_2 y $P'_3(x'_2, y'_1)$ es semejante al triángulo con vértices P_1, P_2 y $P_3(x_2, y_1)$, como se ve en la Figura 1.29. Como las razones de los lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales,

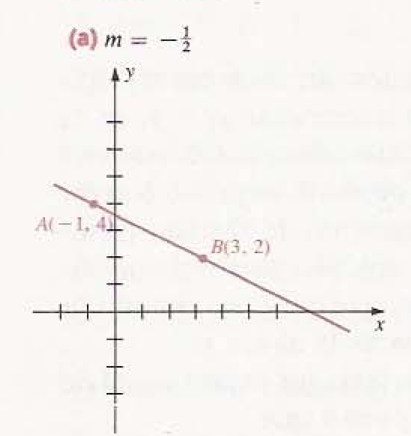
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}.$$

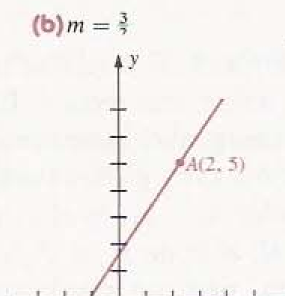
EJEMPLO 1 Trazar la recta que pasa por cada par de puntos y calcular su pendiente.

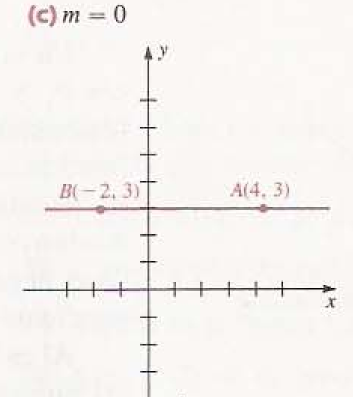
(a) $A(-1, 4)$ y $B(3, 2)$ (b) $A(2, 5)$ y $B(-2, -1)$

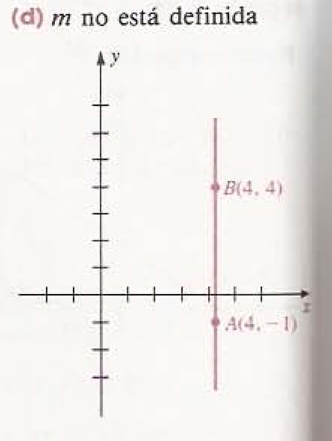
(c) $A(4, 3)$ y $B(-2, 3)$ (d) $A(4, -1)$ y $B(4, 4)$.

FIGURA 1.30









Solución Las rectas pueden verse en la Figura 1.30. Usando la Definición (1.13),

(a) $m = \dfrac{2-4}{3-(-1)} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

(b) $m = \dfrac{5-(-1)}{2-(-2)} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

(c) $m = \dfrac{3-3}{-2-4} = \dfrac{0}{-6} = 0$

(d) La pendiente no está definida porque la recta es vertical. Esto se puede ver también notando que si se usa la fórmula para m, el denominador es cero. •

No es difícil obtener una ecuación cuya gráfica sea una recta dada. Comenzaremos por los casos más sencillos que son cuando la recta es vertical u horizontal.

TEOREMA (1.14)

(i) La gráfica de la ecuación $x = a$ es una recta vertical cuya intercepción x es a.

(ii) La gráfica de la ecuación $y = b$ es una recta horizontal cuya intercepción y es b.

Demostración La ecuación $x = a$ se puede escribir en la forma $x + (0)y = a$. Los puntos $(a, -2)$, $(a, 1)$ y $(a, 0)$ son soluciones típicas de esta ecuación. Evidentemente, toda solución tiene la forma (a, y), donde y puede tomar cualquier valor y a es fijo. Entonces, la gráfica de $x = a$ es una recta que es paralela al eje y y su intercepción


FIGURA 1.31

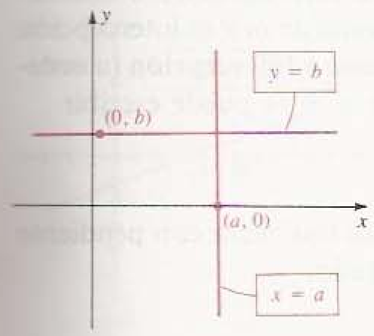
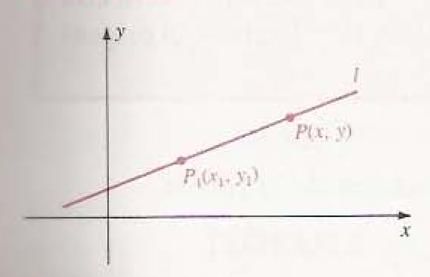


FIGURA 1.32



x es a, como se ilustra en la Figura 1.31. Esto demuestra (i). La parte (ii) se verifica de manera análoga. • •

Procedemos ahora a encontrar una ecuación para una recta l que tiene pendiente m y pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ (sólo hay una recta que satisface estas condiciones). Si $P(x, y)$ es cualquier punto con $x \neq x_1$ (véase la Figura 1.32), entonces P está en l si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es m, es decir,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Nótese que (x_1, y_1) es una solución de esta última ecuación y, por lo tanto, los puntos de l son precisamente los que corresponden a la solución. Esta ecuación para l se llama **forma de Punto y Pendiente**.

ECUACIÓN DE LA RECTA DADOS UN PUNTO Y SU PENDIENTE (1.15)

La ecuación de una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m, es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EJEMPLO 2 Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, 7)$ y $B(-3, 2)$.

Solución La pendiente m de la recta es

$$m = \frac{7 - 2}{1 - (-3)} = \frac{5}{4}.$$

En la ecuación con la forma de Punto y Pendiente (1.15) se pueden usar como (x_1, y_1) las coordenadas de A o bien de B. Usando $A(1, 7)$ obtenemos

$$y - 7 = \tfrac{5}{4}(x - 1)$$

que es equivalente a

$$4y - 28 = 5x - 5 \quad \text{o bien} \quad 5x - 4y + 23 = 0. \quad \bullet$$

La Ecuación (1.15) se puede escribir como $y = mx - mx_1 + y_1$, que tiene la forma

$$y = mx + b$$

en donde $b = -mx_1 + y_1$. El número real b es la ordenada de la intersección de la

gráfica con el eje y, como se puede ver tomando $x = 0$, y es la intercepción y u ordenada en el origen. Como la ecuación $y = mx + b$ indica la pendiente m y la intercepción y o la ordenada en el origen, b, se denomina **forma de Pendiente e Intercepción** (u **ordenada en el origen**). Recíprocamente, partiendo de $y = mx + b$ se puede escribir

$$y - b = m(x - 0).$$

Comparando esta ecuación con (1.15), se ve que la gráfica es una recta con pendiente m que pasa por el punto $(0, b)$. Esto da el siguiente resultado.

ECUACIÓN DE LA RECTA DADAS SU PENDIENTE Y SU INTERCEPCIÓN *y* **(1.16)**

> La gráfica de la ecuación $y = mx + b$ es una recta con pendiente m y con intercepción y (ordenada en el origen) b.

Se demostró que toda recta es la gráfica de una ecuación de la forma

$$ax + by + c = 0$$

en donde a, b y c son números reales tales que a y b no son ambos cero. Una ecuación como ésta se llama **ecuación lineal** en x y y. Ahora se demostrará que, recíprocamente, la gráfica de $ax + by + c = 0$ donde a y b no son ambos iguales a cero, es siempre una recta. Si $b \neq 0$, se puede despejar y y obtener

$$y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right)$$

que es una ecuación de la forma (1.16) con pendiente $-a/b$ e intercepción y igual a $-c/b$. Si $b = 0$ pero $a \neq 0$, se puede despejar x y obtener $x = -c/a$, que es la ecuación de una recta vertical con intercepción x (abscisa en el origen) igual a $-c/a$. Esto completa la demostración del siguiente teorema.

TEOREMA **(1.17)**

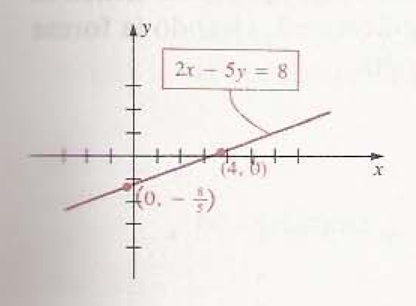
> La gráfica de una ecuación lineal $ax + by + c = 0$ es una recta y, recíprocamente, toda línea recta es la gráfica de una ecuación lineal.

Por simplicidad, se usará la expresión *la recta* $ax + by + c = 0$ en vez de la expresión más precisa *la recta con ecuación* $ax + by + c = 0$.

EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de $2x - 5y = 8$.

Solución Por el teorema (1.17), la gráfica es una recta y por lo tanto basta encontrar dos puntos de la gráfica. Buscaremos la abscisa y la ordenada en el origen. Sustituyendo $y = 0$ en la ecuación, obtenemos que la abscisa en el origen es 4. Sustituyendo $x = 0$ vemos que la ordenada en el origen es $-\frac{8}{5}$. Esto nos lleva a la gráfica de la Figura 1.33.

FIGURA 1.33



Otro camino para encontrar la gráfica consiste en expresar la ecuación en términos de la pendiente y la ordenada en el origen. Comenzamos por dejar solo el término en y a un lado del signo igual, obteniendo

$$5y = 2x - 8.$$

Luego se dividen ambos lados entre 5 y resulta así

$$y = \frac{2}{5}x + \left(\frac{-8}{5}\right)$$

que es de la forma $y = mx + b$. Por lo tanto, la pendiente es $m = \frac{2}{5}$ y la ordenada en el origen es $b = -\frac{8}{5}$. Podemos dibujar una recta que pasa por $(0, -\frac{8}{5})$ y tiene pendiente $\frac{2}{5}$. •

El siguiente teorema señala la relación entre rectas paralelas y la pendiente.

TEOREMA (1.18) Dos rectas que no son verticales, son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

Demostración Sean l_1 y l_2 dos rectas con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Usando la forma de Pendiente e Intercepción (1.16), resulta que tales rectas tienen las ecuaciones

$$y = m_1x + b_1, \qquad y = m_2x + b_2$$

en donde b_1 y b_2 son las intercepciones y u ordenadas en el origen. Las rectas se cortan en un punto (x, y) si y sólo si

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2$$

o bien $$(m_1 - m_2)x = b_2 - b_1.$$

Como $l_1 \neq l_2$, puede despejarse x de la ecuación anterior si y sólo si $m_1 - m_2 \neq 0$. Esto muestra que las rectas l_1 y l_2 se intersecan si y sólo si $m_1 \neq m_2$. Por lo tanto, son paralelas (*no* se cortan) si y sólo si $m_1 = m_2$. • •

EJEMPLO 4 Encontrar la ecuación de una recta que pasa por el punto $(5, -7)$ y es paralela a la recta $6x + 3y - 4 = 0$.

Solución Expresemos la ecuación en términos de la pendiente y la ordenada al origen. Comenzaremos por escribir

$$3y = -6x + 4$$

y, dividiendo ambos lados entre 3, obtenemos

$$y = -2x + \tfrac{4}{3}.$$

Esta ecuación tiene la forma (1.16) con $m = -2$. Como las rectas paralelas tienen la misma pendiente, la recta que buscamos también tiene pendiente -2. Usando la forma (1.15) de la ecuación dados un punto y la pendiente, resulta

$$y + 7 = -2(x - 5).$$

Esto es equivalente a

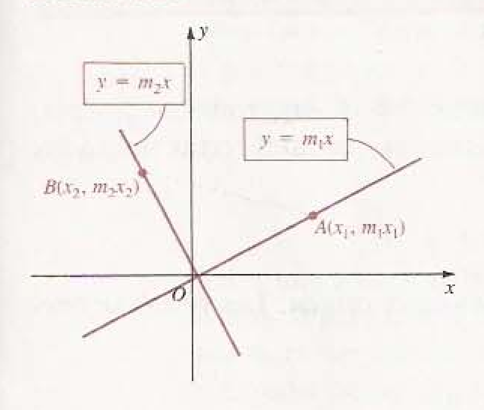
$$y + 7 = -2x + 10 \quad \text{o bien} \quad 2x + y - 3 = 0. \quad \bullet$$

El siguiente resultado da una condición para que dos rectas sean perpendiculares.

TEOREMA (1.19) Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si

$$m_1 m_2 = -1$$

FIGURA 1.34



Demostración Por simplicidad se considerará solamente el caso en que las dos rectas se intersecan en el origen O, como se ilustra en la Figura 1.34. Entonces sus ecuaciones son $y = m_1x$ y $y = m_2x$. Si se escogen puntos $A(x_1, m_1x_1)$ y $B(x_2, m_2x_2)$ distintos de O sobre las rectas, como se ve en la figura, entonces las rectas son perpendiculares si y sólo si el ángulo AOB es recto. Por el Teorema de Pitágoras, el ángulo AOB es recto si y sólo si

$$[d(A, B)]^2 = [d(O, B)]^2 + [d(O, A)]^2$$

o, por la Fórmula de la Distancia,

$$(m_2x_2 - m_1x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 = (m_2x_2)^2 + x_2^2 + (m_1x_1)^2 + x_1^2.$$

Desarrollando los cuadrados y simplificando,

$$-2m_1m_2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 0.$$

Dividiendo ambos lados entre $-2x_1x_2$, se ve que $m_1m_2 + 1 = 0$. Por lo tanto, las rectas son perpendiculares si y sólo si $m_1m_2 = -1$.

Para el caso en que las rectas se intersecan en *un* punto *arbitrario* (a, b) puede darse una demostración parecida. • •

Para recordar la condición de perpendicularidad, es conveniente notar que m_1 y m_2 deben ser cada una el *recíproco negativo* de la otra, es decir, $m_1 = -1/m_2$ y $m_2 = -1/m_1$.

EJEMPLO 5 Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento que va de $A(1, 7)$ a $B(-3, 2)$.

Solución Por la Fórmula del Punto Medio (1.10), el punto central M del segmento AB es $(-1, \frac{9}{2})$. Como la pendiente de AB es $\frac{5}{4}$ (véase el Ejemplo 2), del Teorema (1.19) se deduce que la pendiente de la mediatriz es $-\frac{4}{5}$. Usando la Forma de Punto y Pendiente,

$$y - \frac{9}{2} = -\frac{4}{5}(x + 1).$$

Multiplicando por 10 ambos lados y simplificando obtenemos $8x + 10y - 37 = 0$. •

Dos variables x y y están **relacionadas linealmente** si $y = ax + b$ para algunas constantes a y b con $a \neq 0$. En las aplicaciones aparecen con frecuencia las relaciones lineales. El siguiente ejemplo ilustra esto. En los Ejercicios 35-40 pueden verse otras aplicaciones.

EJEMPLO 6 La relación entre la temperatura del aire T (en °F) y la altitud h (la altura en pies sobre el nivel del mar) es aproximadamente lineal. Cuando la temperatura al nivel del mar es de 60°, un incremento de 5 000 pie en la altitud disminuye aproximadamente en 18° la temperatura.

(a) Expresar T en términos de h.

(b) Calcular la temperatura del aire a una altitud de 15 000 pie.

Solución

(a) Como T y h están relacionadas linealmente,

$$T = ah + b$$

para constantes a y b. Como $T = 60$ cuando $h = 0$,

$$60 = a(0) + b \quad \text{o bien} \quad b = 60.$$

Por lo tanto, $$T = ah + 60.$$

Además, si $h = 5\,000$, entonces $T = 60 - 18 = 42$. Sustituyendo estos valores en la fórmula $T = ah + 60$,

$$42 = a(5000) + 60 \quad \text{o bien} \quad 5000a = -18.$$

Por lo tanto, $$a = -\frac{18}{5000} = -\frac{9}{2500}$$

y la fórmula (aproximada) para T es

$$T = -\frac{9}{2500}h + 60.$$

(b) Usando la fórmula para T que obtuvimos en la parte (a), la temperatura cuando $h = 15\,000$ es aproximadamente

$$T = -\frac{9}{2500}(15\,000) + 60 = -54 + 60 = 6°\text{F}.$$ •

EJERCICIOS 1.3

Ejercicios 1-4: Localice los puntos A y B, y calcule la pendiente de la recta que pasa por A y B.

1. $A(-4, 6)$, $B(-1, 18)$
2. $A(6, -2)$, $B(-3, 5)$
3. $A(-1, -3)$, $B(-1, 2)$
4. $A(-3, 4)$, $B(2, 4)$
5. Demuestre que $A(-3, 1)$, $B(5, 3)$, $C(3, 0)$ y $D(-5, -2)$ son los vértices de un paralelogramo.
6. Demuestre que $A(2, 3)$, $B(5, -1)$, $C(0, -6)$ y $D(-6, 2)$ son los vértices de un trapecio.
7. Demuestre que los puntos $A(6, 15)$, $B(11, 12)$, $C(-1, -8)$ y $D(-6, -5)$ son los vértices de un rectángulo.
8. Demuestre que los puntos $A(1, 4)$, $B(6, -4)$ y $C(-15, -6)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.
9. Los puntos $A(-1, -3)$, $B(4, 2)$ y $C(-7, 5)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Encuentre el cuarto vértice.
10. Sean $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ y $D(x_4, y_4)$ los vértices de un cuadrilátero arbitrario. Demuestre que los segmentos que unen los puntos medios de lados adyacentes forman un paralelogramo.

Ejercicios 11-20: Encuentre la ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas.

11. Pasa por $A(2, -6)$, pendiente $\frac{1}{2}$
12. Pendiente -3, ordenada en el origen 5.
13. Pasa por $A(-5, -7)$ y $B(3, -4)$.
14. Abscisa en el origen -4 y ordenada en el origen 8.
15. Pasa por $A(8, -2)$, intercepción y igual a -3.
16. Pendiente 6, intercepción x igual a -2.
17. Pasa por $A(10, -6)$, es paralela (a) al eje y; (b) al eje x.
18. Pasa por $A(-5, 1)$, es perpendicular (a) al eje y; (b) al eje x.
19. Pasa por $A(7, -3)$, es perpendicular a la recta $2x - 5y = 8$.
20. Pasa por $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$ es paralela a la recta $x + 3y = 1$.
21. Dados $A(3, -1)$ y $B(-2, 6)$, encuentre la ecuación de la mediatriz del segmento AB.
22. Obtenga la ecuación de la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes.

Ejercicios 23-30: Use la Forma de Pendiente e Intercepción (1.16) para calcular la pendiente y la ordenada en el origen de la recta dada por la ecuación y trace la gráfica.

23. $3x - 4y + 8 = 0$
24. $2y - 5x = 1$
25. $x + 2y = 0$
26. $8x = 1 - 4y$
27. $5x + 4y = 20$
28. $x + 2 = \frac{1}{2}y$
29. $x = 3y + 7$
30. $x - y = 0$
31. Encuentre un número real k tal que el punto $P(-1, 2)$ se encuentre en la recta $kx + 2y - 7 = 0$.
32. Determine todos los valores de r tales que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(r, 4)$ y $(1, 3 - 2r)$ es menor que 5.
33. Demuestre que si la recta l tiene abscisa en el origen a y ordenada en el origen b diferentes de cero, entonces $(x/a) + (y/b) = 1$, es una ecuación de la recta l. Esta forma se llama *Forma de Intercepciones* (o *Simétrica*) de la recta. Exprese la ecuación $4x - 2y = 6$ en la forma simétrica.
34. Demuestre que

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1).$$

es la ecuación de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Esta forma se llama *Forma de Dos Puntos* de la ecuación de la recta. Use esta forma para encontrar la ecuación de la recta que pasa por $A(7, -1)$ y $B(4, 6)$.

35. Los productos farmacéuticos deben especificar las dosis recomendadas para adultos y para niños. Dos de las fórmulas que se han sugerido para obtener las dosis para niños a partir de las de adultos son las siguientes:

$$\text{Regla de Cowling:} \quad y = \frac{t + 1}{24} a$$

$$\text{Regla de Friend:} \quad y = \frac{2}{25} ta$$

donde a denota la dosis para adultos (en miligramos, mg) y t indica la edad del niño (en años).

(a) Tomando $a = 100$, grafique las dos ecuaciones lineales en el mismo sistema coordenado para $0 \leq t \leq 12$.

(b) ¿Para qué edad las dos fórmulas especifican la misma dosis?

36. La ley de Charles para los gases afirma que si la presión permanece constante entonces la relación entre el volumen V (en cm^3) ocupado por un gas y su temperatura T (en °C) está dada por $V = V_0(1 + \frac{1}{273}T)$.

(a) ¿Cuál es el significado de V_0?

(b) ¿Qué incremento de temperatura corresponde a un incremento en el volumen de V_0 a $2V_0$?

(c) Trace la gráfica de la ecuación en un plano TV para el caso en que $V_0 = 100$, para $T \geq -273$.

37. La resistencia eléctrica R (en ohms, Ω) de un alambre de metal puro tiene una relación lineal con la temperatura T (en °C) dada por la fórmula

$$R = R_0(1 + aT)$$

para alguna constante a y $R_0 > 0$.

(a) ¿Qué significado tiene R_0?

(b) En el *cero absoluto* ($T = -273$°C), $R = 0$. Calcule a.

(c) A 0°C, la resistencia de alambre de plata es de 1.25 Ω. ¿A qué temperatura se duplica la resistencia?

38. La temperatura de congelación del agua es 0°C (o 32°F). La temperatura de ebullición es 100°C (o 212°F). Utilice esta información para encontrar una relación lineal entre la temperatura en °F y la temperatura en °C. ¿Qué incremento de temperatura en °F corresponde a un incremento de temperatura de 1°C?

39. Las ballenas azules recién nacidas miden aproximadamente 24 pie de largo y pesan 3 toneladas (ton). A los 7 meses, cuando se destetan, las ballenas jóvenes tienen una sorprendente longitud de 53 pie y un peso de 23 ton. Sea L la longitud (en pies) y W el peso (en toneladas) de una ballena de t meses de edad.

(a) Suponiendo que L y t están relacionados linealmente, ¿cuál es el incremento diario en la longitud? (Suponga que 1 mes = 30 días.)

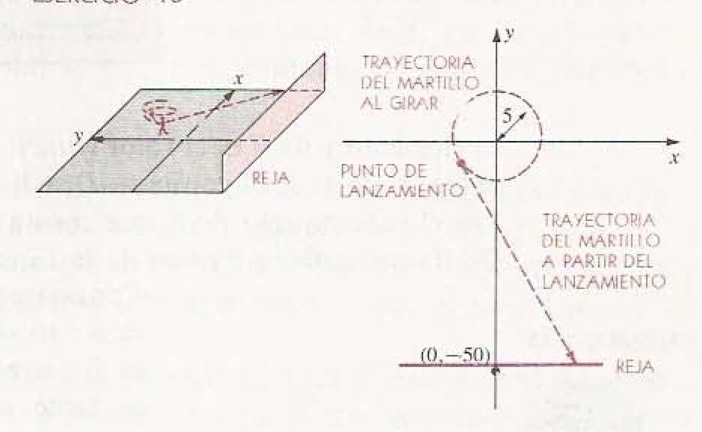
(b) Suponiendo que W y t están relacionados linealmente, ¿cùál es el incremento diario en peso?

40. Un lanzador de martillo practica en un lugar pequeño. Cuando el lanzador gira, el martillo recorre una circunferencia de 5 pie de radio. Una vez lanzado el martillo choca contra una reja de alambre que se encuentra a 50 pie del centro de la zona de lanzamiento. Suponga que unos ejes coordenados se colocan como se muestra en la figura (el dibujo no está a escala).

(a) Si el martillo se suelta en $(-4, -3)$ y se mueve a lo largo de la tangente, ¿en dónde golpearía a la reja?

(b) Si el martillo debe chocar contra la citada reja en el punto $(0, -50)$, ¿en qué sitio de la circunferencia debe soltarse?

EJERCICIO 40



1.4 LA DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

La noción de **correspondencia** aparece frecuentemente en la vida diaria. Por ejemplo,

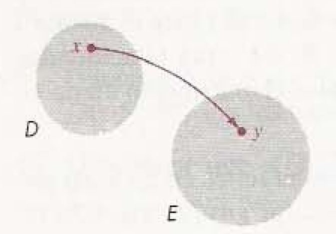
a cada libro de una biblioteca le corresponde un número de páginas;

a cada ser humano le corresponde una fecha de nacimiento;

si se registra la temperatura del aire a lo largo de un día, entonces a cada instante de tiempo le corresponde una temperatura.

Estos ejemplos de correspondencia involucran dos conjuntos D y E. En el primer ejemplo D denota el conjunto de libros de una biblioteca y E es el conjunto de enteros positivos. A cada libro x en D le corresponde un entero positivo y en E, el número de páginas del libro.

FIGURA 1.35



A veces se ilustran las correspondencias con diagramas como el de la Figura 1.35, en los que los conjuntos D y E quedan representados por puntos dentro de ciertas regiones (sombreadas) en el plano. La flecha curva indica que y es el elemento de E que corresponde al elemento x de D. Los conjuntos pueden tener elementos en común. De hecho, muchas veces $D = E$.

Los ejemplos indican que *a cada x en D le corresponde uno y sólo un y en E*; es decir, dado x, se tiene que *y es único*. Sin embargo, a varios elementos de D les puede corresponder un mismo elemento de E. Por ejemplo, dos libros pueden tener el mismo número de páginas, dos personas pueden tener la misma fecha de nacimiento, etcétera.

En general, en todo este libro, D y E serán conjuntos de números. Por ejemplo, si D y E son ambos el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, a cada número real x se le puede asignar su cuadrado x^2. Así, a 3 se le asigna 9, a -5 se le asigna 25, y a $\sqrt{2}$, el número 2. Esto da una correspondencia de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

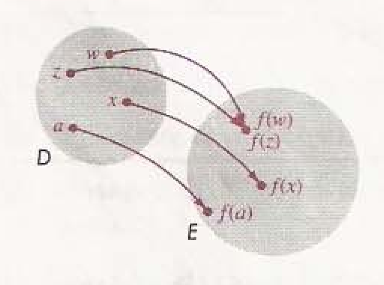
Cada uno de los ejemplos anteriores de una correspondencia es una *función*, que se define como sigue.

DEFINICIÓN (1.20)

> Una **función** f de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asigna a cada elemento x de D un elemento único y de E.

El elemento y de E es el **valor** (*funcional*) de f en x y se denota por $f(x)$ (notación que se lee "f de x"). El conjunto D se llama **dominio** de la función. El **contradominio** de f es el subconjunto de E que consta de todos los valores posibles $f(x)$ para x en D. (Se llama también *ámbito* de la función.)

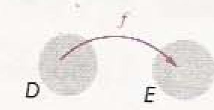
FIGURA 1.36



Consideremos ahora el diagrama de la Figura 1.36. Las flechas curvas indican que los elementos $f(x)$, $f(w)$, $f(z)$ y $f(a)$ de E corresponden a los elementos x, w, z y a de D. Es importante recordar que *a cada x en D se le asigna un valor $f(x)$ en E*. Sin embargo, a elementos diferentes de D, como w y z en la Figura 1.36, les puede corresponder un mismo elemento de E.

Los símbolos

$$D \xrightarrow{f} E, \qquad f\colon D \to E, \quad \text{o bien}$$



significan que f es una función de D a E. A veces, a los estudiantes les confunden las notaciones f y $f(x)$. Hay que recordar que f es el símbolo que se usa para representar a la función y no está en D ni en E. Sin embargo, $f(x)$ es un elemento de E, el que f asigna a x.

Si los conjuntos D y E de la Definición (1.20) son intervalos o algunos otros conjuntos de números reales, entonces en vez de usar puntos dentro de regiones del plano para representar a los elementos, se pueden usar dos rectas coordenadas l y l' como se ilustra en la Figura 1.37.

FIGURA 1.37

Se dice que dos funciones f y g de D a E son **iguales**, y se escribe

$$f = g \quad \text{siempre que} \quad f(x) = g(x) \quad \text{para todo } x \text{ en } D.$$

Por ejemplo, si $g(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 6) + 3$ y $f(x) = x^2$ para todo x en $\mathbb{R}$, entonces $g = f$.

EJEMPLO 1 Sea f una función con dominio $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ para todo x en $\mathbb{R}$.

(a) Calcular $f(-6)$, $f(\sqrt{3})$ y $f(a + b)$, donde a y b son números reales arbitrarios.

(b) ¿Cuál es el contradominio de f?

Solución

(a) Podemos calcular los valores de f sustituyendo x por los valores dados en la ecuación $f(x) = x^2$. Así,

$$f(-6) = (-6)^2 = 36, \qquad f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3,$$

y

$$f(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

(b) Por definición, el contradominio de f consta de todos los números de la forma $f(x) = x^2$, para x en $\mathbb{R}$. Como el cuadrado de cualquier número real es no negativo, el contradominio está contenido en el conjunto de todos los números reales no negativos. Más aún, todo número real no negativo c es un valor de f, ya que $f(\sqrt{c}) = (\sqrt{c})^2 = c$. Por lo tanto, el contradominio de f es el conjunto de todos los números reales no negativos. •

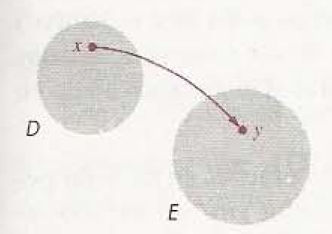
Si una función se define como en el Ejemplo 1, los símbolos que se usan para la función y para la variable son irrelevantes, es decir, todas las expresiones $f(x) = x^2$, $f(s) = s^2$, $g(t) = t^2$ y $k(r) = r^2$ definen la misma función. Esto es porque si a es cualquier número en el dominio, entonces se obtiene el mismo valor a^2 independientemente de la expresión que se utilice.

A lo largo de este libro, la frase *f es una función* significará que tanto el dominio como el contradominio son conjuntos de números reales. Si una función se define por medio de una expresión, como en el Ejemplo 1, y no se especifica explícitamente el dominio D, entonces se considera que D consta de todos los números reales x para los que $f(x)$ es un número real. Por ejemplo, si $f(x) = \sqrt{x - 2}$, entonces se supone que el dominio es el conjunto de todos los números reales x tales que $\sqrt{x - 2}$ es real; es decir, $x - 2 \geq 0$, o $x \geq 2$. Por lo tanto, el dominio es el intervalo infinito $[2, \infty)$. Si x está en el dominio, se dice que **f está definida en x**, o que **$f(x)$ existe**. Si un conjunto S está contenido en el dominio, se dice que **f está definida en S**. La frase **f no está definida en x** significa que x no está en el dominio de f.

Muchas de las fórmulas que aparecen en las matemáticas y en las ciencias determinan funciones. Por ejemplo, la fórmula $A = \pi r^2$ para el área A de un círculo de radio r, asigna a cada número real positivo r, un valor único de A. Esto determina una

Estos ejemplos de correspondencia involucran dos conjuntos D y E. En el primer ejemplo D denota el conjunto de libros de una biblioteca y E es el conjunto de enteros positivos. A cada libro x en D le corresponde un entero positivo y en E, el número de páginas del libro.

FIGURA 1.35



A veces se ilustran las correspondencias con diagramas como el de la Figura 1.35, en los que los conjuntos D y E quedan representados por puntos dentro de ciertas regiones (sombreadas) en el plano. La flecha curva indica que y es el elemento de E que corresponde al elemento x de D. Los conjuntos pueden tener elementos en común. De hecho, muchas veces $D = E$.

Los ejemplos indican que *a cada x en D le corresponde uno y sólo un y en E*; es decir, dado x, se tiene que *y es único*. Sin embargo, a varios elementos de D les puede corresponder un mismo elemento de E. Por ejemplo, dos libros pueden tener el mismo número de páginas, dos personas pueden tener la misma fecha de nacimiento, etcétera.

En general, en todo este libro, D y E serán conjuntos de números. Por ejemplo, si D y E son ambos el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, a cada número real x se le puede asignar su cuadrado x^2. Así, a 3 se le asigna 9, a -5 se le asigna 25, y a $\sqrt{2}$, el número 2. Esto da una correspondencia de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

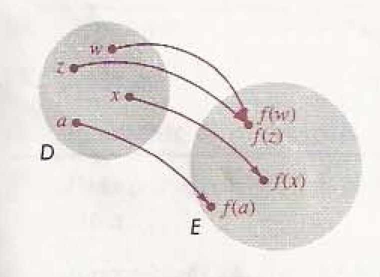
Cada uno de los ejemplos anteriores de una correspondencia es una *función*, que se define como sigue.

DEFINICIÓN (1.20)

Una **función** f de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asigna a cada elemento x de D un elemento único y de E.

El elemento y de E es el **valor** (*funcional*) de f en x y se denota por $f(x)$ (notación que se lee "f de x"). El conjunto D se llama **dominio** de la función. El **contradominio** de f es el subconjunto de E que consta de todos los valores posibles $f(x)$ para x en D. (Se llama también *ámbito* de la función.)

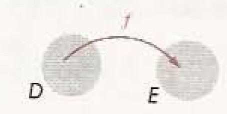
FIGURA 1.36



Consideremos ahora el diagrama de la Figura 1.36. Las flechas curvas indican que los elementos $f(x)$, $f(w)$, $f(z)$ y $f(a)$ de E corresponden a los elementos x, w, z y a de D. Es importante recordar que *a cada x en D se le asigna un valor f(x) en E*. Sin embargo, a elementos diferentes de D, como w y z en la Figura 1.36, les puede corresponder un mismo elemento de E.

Los símbolos

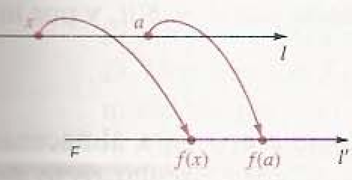
$$D \xrightarrow{f} E, \qquad f\colon D \to E, \quad \text{o bien}$$



significan que f es una función de D a E. A veces, a los estudiantes les confunden las notaciones f y $f(x)$. Hay que recordar que f es el símbolo que se usa para representar a la función y no está en D ni en E. Sin embargo, $f(x)$ es un elemento de E, el que f asigna a x.

Si los conjuntos D y E de la Definición (1.20) son intervalos o algunos otros conjuntos de números reales, entonces en vez de usar puntos dentro de regiones del plano para representar a los elementos, se pueden usar dos rectas coordenadas l y l' como se ilustra en la Figura 1.37.

FIGURA 1.37



Se dice que dos funciones f y g de D a E son **iguales**, y se escribe

$$f = g \quad \text{siempre que} \quad f(x) = g(x) \ \text{ para todo } x \text{ en } D.$$

Por ejemplo, si $g(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 6) + 3$ y $f(x) = x^2$ para todo x en $\mathbb{R}$, entonces $g = f$.

EJEMPLO 1 Sea f una función con dominio $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ para todo x en $\mathbb{R}$.

(a) Calcular $f(-6)$, $f(\sqrt{3})$ y $f(a + b)$, donde a y b son números reales arbitrarios.

(b) ¿Cuál es el contradominio de f?

Solución

(a) Podemos calcular los valores de f sustituyendo x por los valores dados en la ecuación $f(x) = x^2$. Así,

$$f(-6) = (-6)^2 = 36, \qquad f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3,$$

y

$$f(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

(b) Por definición, el contradominio de f consta de todos los números de la forma $f(x) = x^2$, para x en $\mathbb{R}$. Como el cuadrado de cualquier número real es no negativo, el contradominio está contenido en el conjunto de todos los números reales no negativos. Más aún, todo número real no negativo c es un valor de f, ya que $f(\sqrt{c}) = (\sqrt{c})^2 = c$. Por lo tanto, el contradominio de f es el conjunto de todos los números reales no negativos. •

Si una función se define como en el Ejemplo 1, los símbolos que se usan para la función y para la variable son irrelevantes, es decir, todas las expresiones $f(x) = x^2$, $f(s) = s^2$, $g(t) = t^2$ y $k(r) = r^2$ definen la misma función. Esto es porque si a es cualquier número en el dominio, entonces se obtiene el mismo valor a^2 independientemente de la expresión que se utilice.

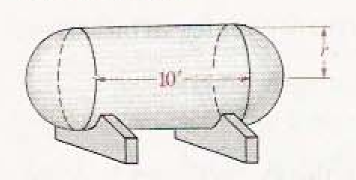
A lo largo de este libro, la frase *f es una función* significará que tanto el dominio como el contradominio son conjuntos de números reales. Si una función se define por medio de una expresión, como en el Ejemplo 1, y no se especifica explícitamente el dominio D, entonces se considera que D consta de todos los números reales x para los que $f(x)$ es un número real. Por ejemplo, si $f(x) = \sqrt{x - 2}$, entonces se supone que el dominio es el conjunto de todos los números reales x tales que $\sqrt{x - 2}$ es real; es decir, $x - 2 \geq 0$, o $x \geq 2$. Por lo tanto, el dominio es el intervalo infinito $[2, \infty)$. Si x está en el dominio, se dice que f **está definida en** x, o que $f(x)$ **existe**. Si un conjunto S está contenido en el dominio, se dice que f **está definida en** S. La frase f **no está definida en** x significa que x no está en el dominio de f.

Muchas de las fórmulas que aparecen en las matemáticas y en las ciencias determinan funciones. Por ejemplo, la fórmula $A = \pi r^2$ para el área A de un círculo de radio r, asigna a cada número real positivo r, un valor único de A. Esto determina una

función f tal que $f(r) = \pi r^2$, y se puede escribir $A = f(r)$. La letra r representa un número arbitrario en el dominio de f y se llama **variable independiente**. La letra A que representa a un número en el contradominio de f se la llama **variable dependiente**, pues su valor depende del de r. Si dos variables r y A están relacionadas de esta manera se dice que "A es una función de r". Veamos otro ejemplo. Si un automóvil viaja con velocidad constante de 80 kilómetros por hora (km/h), entonces la distancia d (en kilómetros, km) que recorre en un tiempo t (en horas) está dada por $d = 80t$, y por lo tanto, la distancia d es una función del tiempo t.

EJEMPLO 2 Se desea construir un tanque horizontal de acero para almacenar gas propano, que tenga forma de cilindro circular recto de 3 m de largo con una semiesfera en cada extremo. El radio r no está aún determinado. Expresar el volumen V del tanque como una función de r.

FIGURA 1.38



Solución En la Figura 1.38 se tiene un croquis del tanque. El volumen de la parte cilíndrica del tanque puede calcularse multiplicando la altura 3 por el área πr^2 de la base del cilindro. Esto da

$$\text{Volumen del cilindro} = 3(\pi r^2) = 3\pi r^2.$$

Los dos extremos semiesféricos forman juntos una esfera de radio r. Usando la fórmula para el volumen de una esfera, obtenemos

$$\text{Volumen de los dos extremos} = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

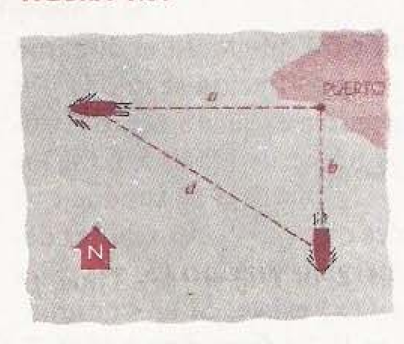
Por lo tanto, el volumen V del tanque es

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 + 3\pi r^2.$$

Esta fórmula expresa V como una función de r. Se puede factorizar y escribir:

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2(4r + 9). \quad \bullet$$

FIGURA 1.39



EJEMPLO 3 Dos barcos zarpan al mismo tiempo del puerto. Uno viaja al oeste a 17 mi/h y el otro hacia el sur a 12 mi/h. Sea t el tiempo (en horas) después de la salida. Expresar la distancia d entre las embarcaciones como una función de t.

Solución Para visualizar el problema, se traza un diagrama como el de la Figura 1.39 y se asignan literales a las distancias. Por el Teorema de Pitágoras,

$$d^2 = a^2 + b^2 \quad \text{o bien} \quad d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Como distancia = (velocidad)(tiempo) y las velocidades son 17 y 12, respectivamente,

$$a = 17t \quad \text{y} \quad b = 12t.$$

Sustituyendo en $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ obtenemos

$$d = \sqrt{(17t)^2 + (12t)^2} = \sqrt{289t^2 + 144t^2} = \sqrt{433t^2} \quad \text{o bien} \quad d = \sqrt{433}t.$$

La fórmula $d \approx (20.8)t$ expresa *aproximadamente* d como función de t. •

Si $f(x) = x$ para todo x en el dominio de f, entonces f se llama **función identidad** en D. Una función f es una **función constante** si existe un elemento (fijo) c en el contradominio tal que $f(x) = c$ para todo x en el dominio. Si una función constante se representa con un diagrama como el de la Figura 1.35, *todas* las flechas que salen de D terminan en el mismo punto de E.

Las funciones del tipo descrito en la siguiente definición aparecen frecuentemente en la práctica.

DEFINICIÓN (1.21)

Sea f una función tal que siempre que x esté en el dominio D, $-x$ también está en D.

(i) f es **par** si $f(-x) = f(x)$ para todo x en D.

(ii) f es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en D.

EJEMPLO 4

(a) Sea $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$. Demostrar que f es una función par.

(b) Sea $g(x) = 2x^5 - 7x^3 + 4x$. Demostrar que g es una función impar.

Solución Si x es un número real, entonces

(a)
$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 \\ &= 3x^4 - 2x^2 + 5 = f(x) \end{aligned}$$

y por lo tanto, f es par.

(b)
$$\begin{aligned} g(-x) &= 2(-x)^5 - 7(-x)^3 + 4(-x) \\ &= -2x^5 + 7x^3 - 4x \\ &= -(2x^5 - 7x^3 + 4x) = -g(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, g es impar. •

Una función f puede tomar el mismo valor para distintos números de su dominio. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces $f(2) = 4$ y $f(-2) = 4$, pero $2 \neq -2$. Si los valores de una función son siempre diferentes, entonces la función es *biunívoca* o (*uno a uno*).

DEFINICIÓN (1.22)

Una función f con dominio D y contradominio E, es una **función biunívoca**, si siempre que $a \neq b$ en D entonces $f(a) \neq f(b)$ en E.

EJEMPLO 5

(a) Sea $f(x) = 3x + 2$. Demostrar que f es biunívoca.

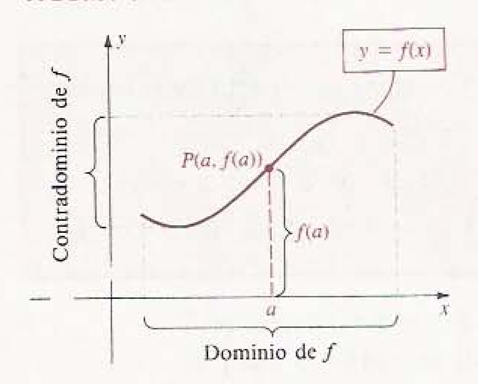
(b) Sea $g(x) = x^4 + 2x^2$. Demostrar que g no es biunívoca.

Solución

(a) Si $a \neq b$, entonces $3a \neq 3b$ y por lo tanto $3a + 2 \neq 3b + 2$ o bien $f(a) \neq f(b)$. De donde f es biunívoca.

(b) La función g no es biunívoca pues puede haber el mismo valor en números distintos de su dominio. Por ejemplo, aunque $-1 \neq 1$, $g(-1)$ y $g(1)$ son ambos iguales a 3. •

FIGURA 1.40



Se puede usar una gráfica para mostrar los cambios de los valores $f(x)$ de una función f cuando x varía dentro del dominio de f. Por definición, la **gráfica de una función** f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ para x en el dominio de f. A veces se pone la indicación $y = f(x)$ en el croquis de la gráfica, como se muestra en la Figura 1.40. Nótese que si $P(a, b)$ es un punto de la gráfica, entonces la ordenada b es el valor $f(a)$ de la función. La figura muestra el dominio de f (el conjunto de los valores posibles de x) y el contradominio de f (los correspondientes valores de y). Aunque en la figura el dominio y el contradominio son intervalos cerrados, podrían ser intervalos infinitos u otros tipos de conjuntos de números reales.

Es importante notar que como hay un valor único $f(a)$ para cada a en el dominio, sólo hay *un* punto de la gráfica que tiene abscisa a. Por lo tanto, *toda recta vertical corta a la gráfica de una función a lo más en un punto*. Entonces, una gráfica a la que alguna recta vertical corte en más de un punto, como en el caso de una circunferencia, no puede ser la gráfica de una función.

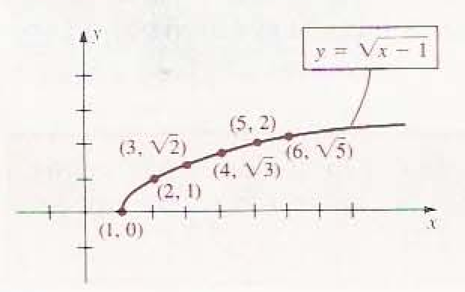
Las intercepciones x (o abscisas en el origen) de la gráfica de una función f son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. Estos números se llaman **ceros** de la función. La intercepción y (ordenada en el origen) de la gráfica, si existe, es $f(0)$.

EJEMPLO 6 Trazar la gráfica de la función f dada por $f(x) = \sqrt{x-1}$. ¿Cuáles son el dominio y el contradominio de f?

Solución Por definición, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{x-1}$. La siguiente tabla presenta las coordenadas de algunos puntos de la gráfica.

x	1	2	3	4	5	6
y	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$

FIGURA 1.41



Situando puntos se obtiene el croquis que se muestra en la Figura 1.41. Nótese que la abscisa en el origen es 1 y que no hay ordenada en el origen.

El dominio de f consta de todos los números reales x tales que $x \geq 1$, es decir, el intervalo $[1, \infty)$. El contradominio de f es el conjunto de todos los números reales y tales que $y \geq 0$, es decir, $[0, \infty)$. •

EJEMPLO 7 Trazar la gráfica de la función f dada por $f(x) = 3 - x^2$. ¿Cuáles son el dominio y el contradominio de f?

FIGURA 1.42

Solución La siguiente tabla presenta algunos de los puntos (x, y) de la gráfica.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-6	-1	2	3	2	-1	-6

Las intercepciones x son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, es decir, de $3 - x^2 = 0$. Sus valores son $\pm\sqrt{3}$. La intercepción y es $f(0) = 3$. Por localización de puntos se obtiene la parábola de la Figura 1.42.

Como x puede tomar cualquier valor, el dominio de f es $\mathbb{R}$. De la gráfica, vemos que el contradominio de f es $(-\infty, 3]$. •

Se puede simplificar la solución del Ejemplo 7 observando que como $3 - (-x)^2 = 3 - x^2$, la gráfica de $y = 3 - x^2$ es simétrica con respecto al eje y. Este hecho es también consecuencia de (i) del siguiente teorema.

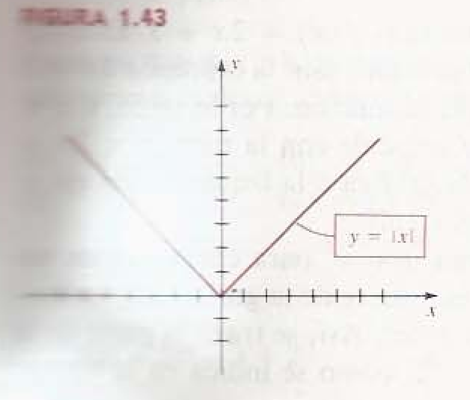
TEOREMA (1.23)

(i) La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y.

(ii) La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

Demostración Si f es par, entonces $f(-x) = f(x)$ y, por lo tanto, la ecuación $y = f(x)$ no cambia al sustituir x por $-x$. El enunciado (i) se puede deducir del Criterio de Simetría (1.11) (i). La demostración de (ii) se deja al lector. • •

FIGURA 1.43



EJEMPLO 8 Trazar la gráfica de la función f dada por $f(x) = |x|$ y encontrar el dominio y el contradominio de f.

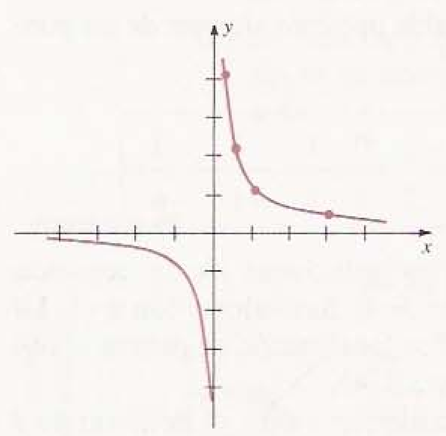
Solución Si $x \geq 0$, entonces $f(x) = x$ y por lo tanto, la parte de la gráfica que se encuentra a la derecha del eje x es idéntica a la gráfica de $y = x$, que es una recta que pasa por el origen y tiene pendiente 1. Si $x < 0$, entonces, por la Definición (1.2), $f(x) = |x| = -x$, y por lo tanto, la parte de la gráfica que se encuentra a la izquierda del eje y es igual a la gráfica de $y = -x$. En la Figura 1.43 se indica la gráfica de f.

Nótese que f es una función par y, por el Teorema (1.23) (i), la gráfica es simétrica con respecto al eje y, como también se ve en la figura.

De la gráfica vemos que el dominio de f es $\mathbb{R}$ y el contradominio es $[0, \infty)$. •

EJEMPLO 9 Trazar la gráfica de la función f dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

FIGURA 1.44



Solución El dominio de f es el conjunto de todos los números reales diferentes de cero. Cuando x es positivo, $f(x)$ también lo es y por lo tanto, ningún punto de la gráfica se encuentra en el cuarto cuadrante. El segundo cuadrante tampoco tiene puntos de la gráfica pues, cuando $x < 0$, $f(x) < 0$. Si x está cerca de cero, entonces $|1/x|$ es grande. Cuando x crece tomando valores positivos, $1/x$ decrece y se acerca a cero para valores grandes de x. Análogamente, si x es negativo y $|x|$ es grande, entonces $1/x$ está cerca de cero. Ubicando algunos puntos y tomando en cuenta estos comentarios obtenemos el croqüis de la Figura 1.44.

La gráfica de f o, equivalentemente, la de la ecuación $y = 1/x$, es simétrica con respecto al origen. Esto se puede verificar usando el Teorema (1.23) (ii) o bien el Criterio de Simetría (1.11) (iii). •

EJEMPLO 10 Describir la gráfica de una función constante.

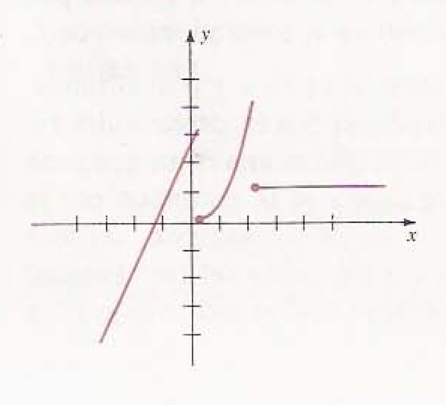
Solución Si para algún número real c, $f(x) = c$ para todo x, entonces la gráfica de f es la misma que la de la ecuación $y = c$, y por lo tanto, es una recta horizontal con intercepción y igual a c. •

A veces las funciones se describen con varias expresiones, como en los siguientes ejemplos. Se dice que tales funciones tienen **definición parte por parte**.

EJEMPLO 11 Trazar la gráfica de la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

FIGURA 1.45



Solución Si $x < 0$, entonces $f(x) = 2x + 3$. Esto significa que para x negativo, debemos usar la expresión $2x + 3$ para encontrar los valores de la función. Por lo tanto, si $x < 0$, entonces la gráfica de f coincide con la recta $y = 2x + 3$ y se traza esta parte de la gráfica a la izquierda del eje y, como se indica en la Figura 1.45.

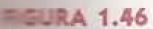
Si $0 \le x < 2$, debemos usar x^2 para encontrar los valores de f y, por lo tanto, esta parte de la gráfica de f coincide con la de la parábola $y = x^2$. Así, se traza la parte de la gráfica entre $x = 0$ y $x = 2$, como se indica en la figura.

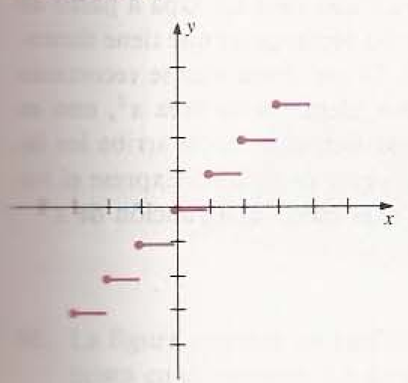
Finalmente, si $x \geq 2$, f toma siempre el valor 1. Para $x \geq 2$, la gráfica de f es la recta horizontal que se muestra en la Figura 1.45. •

EJEMPLO 12 Para cualquier número real x, existen enteros consecutivos n y $n + 1$ tales que $n \leq x \leq n + 1$. Sea f la función definida como sigue: Si $n \leq x < n + 1$, entonces $f(x) = n$. Trazar la gráfica de f.

Solución La tabla siguiente indica la relación entre las abscisas y las ordenadas de los puntos de la gráfica:

Valores de x	$f(x)$
...	...
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2
...	...


FIGURA 1.46



Como f es una función constante mientras x se encuentra entre dos enteros consecutivos, la parte correspondiente de la gráfica es un segmento de una recta horizontal. En la Figura 1.46 aparece una parte de la gráfica. La representación continúa indefinidamente a la derecha y a la izquierda. •

Para denotar el mayor entero n tal que $n \leq x$, se utiliza el símbolo $[\![x]\!]$. Por ejemplo, $[\![1.6]\!] = 1$, $[\![\sqrt{5}]\!] = 2$, $[\![\pi]\!] = 3$ y $[\![-3.5]\!] = -4$. Usando esta notación, la función del Ejemplo 12 se puede definir por $f(x) = [\![x]\!]$. La función f se llama **función mayor entero**.

EJERCICIOS 1.4

1. Sea $f(x) = x^3 + 4x - 3$. Calcule $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$ y $f(\sqrt{2})$.

2. Sea $f(x) = \sqrt{x - 1} + 2x$. Calcule $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$ y $f(10)$.

Ejercicios 3-4: Sea f la función dada, y sean a y h dos números reales. Encuentre lo siguiente:

(a) $f(a)$ (b) $f(-a)$
(c) $-f(a)$ (d) $f(a + h)$
(e) $f(a) - f(h)$ (f) $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ para $h \neq 0$.

3. $f(x) = 3x^2 - x + 2$ 4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

Ejercicios 5-6: Sea g la función dada. Determine lo siguiente:

(a) $g(1/a)$ (b) $\dfrac{1}{g(a)}$ (c) $g(a^2)$
(d) $[g(a)]^2$ (e) $g(\sqrt{a})$ (f) $\sqrt{g(a)}$

5. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ 6. $g(x) = \dfrac{1}{x}$

Ejercicios 7-12: Encuentre el dominio de la función f.

7. $f(x) = \sqrt{3x - 5}$ 8. $f(x) = \sqrt{7 - 2x}$
9. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ 10. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
11. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^3 - 9x}$ 12. $f(x) = \dfrac{4x + 7}{6x^2 + 13x - 5}$

Ejercicios 13-20: Determine si la función f es biunívoca.

13. $f(x) = 2x + 9$
14. $f(x) = \dfrac{1}{7x+9}$
15. $f(x) = 5 - 3x^2$
16. $f(x) = 2x^2 - x - 3$
17. $f(x) = \sqrt{x}$
18. $f(x) = x^3$
19. $f(x) = |x|$
20. $f(x) = 4$

rcicios 21-30: Determine si f es par o impar, o si es par ni impar.

21. $f(x) = 3x^3 - 4x$
22. $f(x) = 7x^4 - x^2 + 7$
23. $f(x) = 9 - 5x^2$
24. $f(x) = 2x^5 - 4x^3$
25. $f(x) = 2$
26. $f(x) = 2x^3 + x^2$
27. $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$
28. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
29. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4}$
30. $f(x) = |x| + 5$

Ejercicios 31-44: Trace la gráfica y determine el dominio y el contradominio de f.

31. $f(x) = -4x + 3$
32. $f(x) = 4x - 3$
33. $f(x) = -3$
34. $f(x) = 3$
35. $f(x) = 4 - x^2$
36. $f(x) = -(4 + x^2)$
37. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
38. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
39. $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$
40. $f(x) = -\dfrac{1}{(x-4)^2}$
41. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$
42. $f(x) = x + |x|$
43. $f(x) = \sqrt{4 - x}$
44. $f(x) = 2 - \sqrt{x}$

Ejercicios 45-50: Trace la gráfica de la función f definida parte por parte.

45. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -3 \\ -x & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ -3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

47. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ -2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

49. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

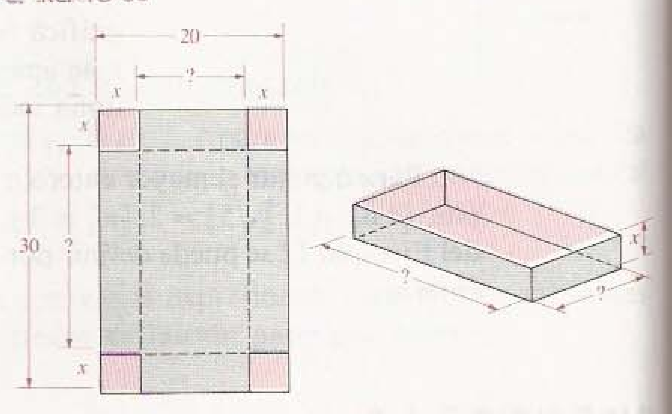
50. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

51. Explique por qué la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ no es la gráfica de una función.

52. Demuestre que una función f es biunívoca si y sólo si toda recta horizontal corta a la gráfica de f a lo más en un punto.

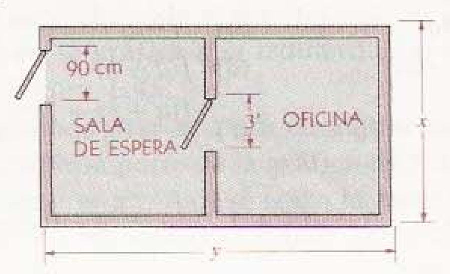
53. Se desea construir una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón rectangular que tiene dimensiones 20 cm × 30 cm. Para ello se recortarán cuatro cuadrados idénticos de área x^2, uno en cada esquina y se doblarán hacia arriba los lados resultantes (véase la figura). Exprese el volumen V de la caja como una función de x.

EJERCICIO 53



54. Un pequeño edificio de oficinas está construido sobre un área de 46 m². El plano del piso se muestra en la figura.
   (a) Exprese la longitud y del área del edificio como una función del ancho x.
   (b) Suponiendo que el costo de las paredes es de $100 (dólares) el metro lineal, exprese el

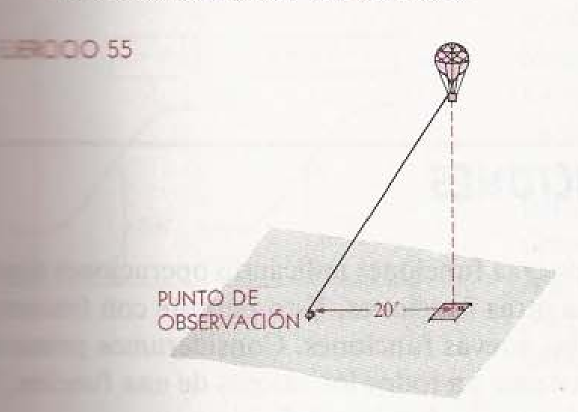
EJERCICIO 54



costo C de las paredes como una función del ancho x. (Desprecie la porción de pared sobre las puertas.)

55. Un globo de aire caliente se suelta a la 1 P.M. y se eleva verticalmente a razón de 2 m/s. Un punto de observación está situado a 100 m del punto en el suelo que se encuentra ubicado directamente abajo del globo (véase la figura). Sea t el tiempo (en segundos) transcurrido a partir de la 1 P.M. Exprese la distancia d del globo al punto de observación como una función de t.

EJERCICIO 55

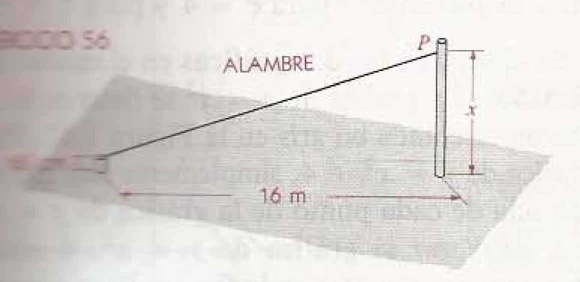


56. La figura muestra las instalaciones de un equilibrista en el alambre. La distancia entre los postes es de 16 m, pero aún no se ha determinado la altura del punto de amarre P.

(a) Exprese la longitud L como una función de la altura x del punto P.

(b) Determine la altura del punto de amarre P suponiendo que el alambre o cuerda tiene una longitud de 24 m.

EJERCICIO 56

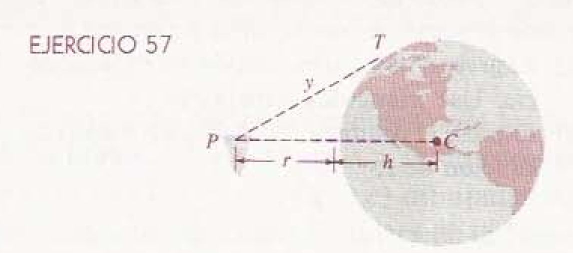


57. Desde un punto exterior P que se encuentra a h unidades de una circunferencia de radio r, se traza una tangente a la circunferencia (véase la figura). Sea y la distancia del punto P al punto de tangencia T.

(a) Exprese y como función de h. (*Sugerencia:* Si C es el centro de la circunferencia, entonces PT es perpendicular a CT.)

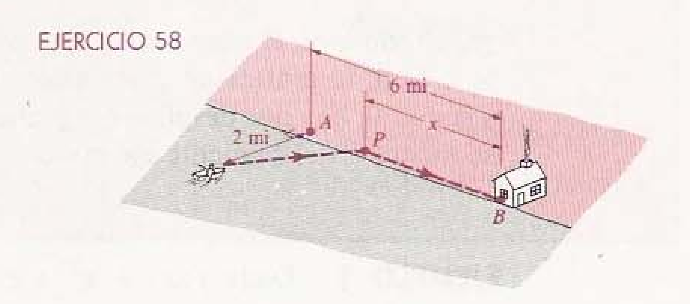
(b) Sea r el radio de la Tierra y h la altitud de un transbordador espacial. Se puede deducir una fórmula para la distancia máxima y (desde la Tierra) a la que un astronauta puede ver desde el transbordador. Calcule y aproximadamente suponiendo que h = 200 millas y $r \approx$ 4000 millas.

EJERCICIO 57



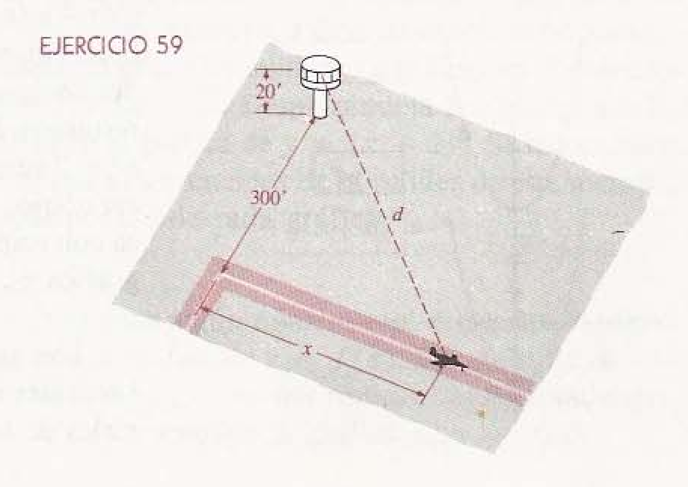
58. Un hombre se encuentra en un bote a 2 millas del punto más cercano A de la costa, que es recta, y desea llegar a una casa que se encuentra en un punto B de la citada costa, a 6 millas (mi) de A (véase la figura). El hombre piensa remar hasta un punto P entre A y B que se encuentra a x millas de la casa y luego caminar el resto. Suponiendo que puede remar a una velocidad de 3 mi/h y caminar a 5 mi/h, exprese el tiempo total T que la tomará llegar a la casa, como una función de x.

EJERCICIO 58



59. En la figura se muestran las posiciones relativas de un avión y una torre de control de 20 pie de alto. El principio de la pista se encuentra a una distancia de 300 pie de la base de la torre, sobre

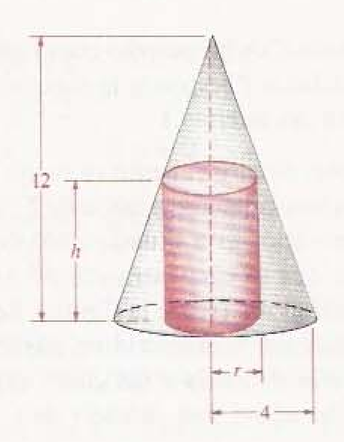
EJERCICIO 59



la perpendicular. Exprese la distancia d de la aeronave a la torre de control como una función de la distancia x que el avión ha recorrido sobre la pista.

60. Un cilindro circular recto de radio r y altura h está inscrito en un cono de altura 12 y radio de la base 4, como se ilustra en la figura.
   (a) Exprese h como una función de r (*Sugerencia:* Use triángulos semejantes.)
   (b) Exprese el volumen V del cilindro como una función de r.

EJERCICIO 60



1.5 OPERACIONES CON LAS FUNCIONES

En esta sección se estudia la obtención de nuevas funciones aplicando operaciones algebraicas como la suma y la multiplicación a otras funciones. Esto permite con frecuencia obtener fácilmente las propiedades de las nuevas funciones. Consideramos primero la función que se obtiene al sumar una constante c a todos los valores de una función f.

Sea f una función, c una constante y sea g la función definida por

$$g(x) = f(x) + c$$

para todo x en el dominio de f. A veces se dice que g y f *difieren por una constante*. Si $c > 0$, la gráfica de g se obtiene desplazando la de f una distancia c hacia arriba y si $c < 0$, hay que desplazar la gráfica de f una distancia $|c|$ hacia abajo. Este método se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Dada $f(x) = x^2 + c$, trazar la gráfica de f para $c = 4$ y para $c = -2$.

Solución Se dibujarán las dos gráficas en el mismo sistema de coordenadas. La gráfica de $y = x^2$ se tiene en la Figura 1.20 y está representada en gris en la Figura 1.47. Para encontrar la gráfica de $y = x^2 + 4$, simplemente hay que sumar 4 a la ordenada de cada punto de la gráfica de $y = x^2$. Esto equivale a *desplazar* la gráfica de $y = x^2$, 4 unidades *hacia arriba*, como se muestra en la figura. Para $c = -2$, restamos 2 a las ordenadas, por lo que la gráfica de $y = x^2 - 2$ se obtiene desplazando la de $y = x^2$, 2 unidades *hacia abajo*. Cada una de las gráficas es una parábola simétrica con respecto al eje y. Para verificar que la posición de cada gráfica es correcta se suelen trazar algunos puntos.

FIGURA 1.47

$y = x^2 + 4$

$y = x^2$

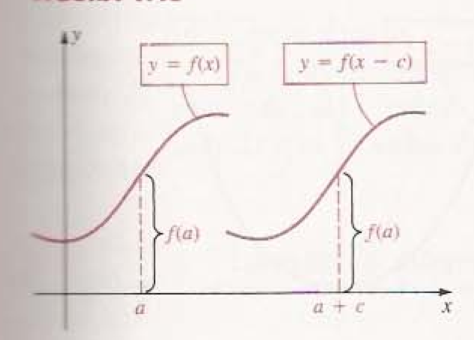
$y = x^2 - 2$

Las gráficas del ejemplo anterior son **desplazamientos verticales** de la gráfica de $y = x^2$, y resultan ser casos especiales de las siguientes reglas generales.

DESPLAZAMIENTOS VERTICALES DE LAS GRÁFICAS ($c > 0$)

Para obtener la gráfica de:	se desplaza la gráfica de $y = f(x)$:
$y = f(x) - c$	c unidades hacia abajo
$y = f(x) + c$	c unidades hacia arriba

FIGURA 1.48

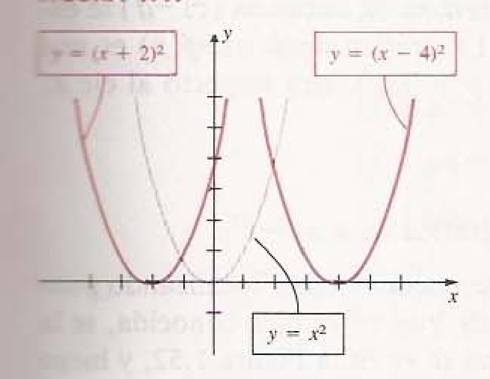


Es posible enunciar reglas semejantes para los **desplazamientos horizontales**. En efecto, si $c > 0$, consideremos las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(x - c)$ dibujadas según los mismos ejes coordenados, como se ilustra en la Figura 1.48. Como $f(a) = f(a + c - c)$, se ve que el punto de la gráfica de $y = f(x)$ con abscisa a tiene la misma ordenada que el punto de la gráfica de $y = f(x - c)$ con abscisa $a + c$. Esto implica que la gráfica de $y = f(x - c)$ se obtiene desplazando la de $y = f(x)$, c unidades hacia la derecha. Análogamente, la gráfica de $y = f(x + c)$ se obtiene desplazando la de f un valor de c unidades hacia la izquierda. Estas reglas se resumen en el siguiente cuadro.

DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES DE LAS GRÁFICAS ($c > 0$)

Para obtener la gráfica de	se desplaza la gráfica de $y = f(x)$:
$y = f(x - c)$	c unidades hacia la derecha
$y = f(x + c)$	c unidades hacia la izquierda

FIGURA 1.49



EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de f para $f(x) = (x - 4)^2$ y para $f(x) = (x + 2)^2$.

Solución La gráfica de $y = x^2$ aparece en gris en la Figura 1.49. Según las reglas para desplazamientos horizontales, al trasladar la gráfica 4 unidades a la derecha obtenemos la gráfica de $y = (x - 4)^2$. Desplazándola 2 unidades a la izquierda, se tiene la gráfica de $y = (x + 2)^2$. Se recomienda a quienes no estén convencidos de la validez de este método, ubicar varios puntos de cada gráfica. •

Para obtener la gráfica de $y = cf(x)$ para algún número real c, pueden *multiplicarse* por c las ordenadas de los puntos de la gráfica de $y = f(x)$. Por ejemplo, si $y = 2f(x)$, se duplican las ordenadas y si $y = \frac{1}{2} f(x)$, se multiplican las ordenadas por $\frac{1}{2}$. Si $c > 0$ (y $c \neq 1$), este proceso se llama **ampliar** la gráfica de $y = f(x)$.

EJEMPLO 3 Trazar las gráficas de **(a)** $y = 4x^2$ y **(b)** $y = \frac{1}{4}x^2$.

Solución

(a) Para trazar la gráfica de $y = 4x^2$ comenzamos con la gráfica de $y = x^2$ (que aparece en gris en la Figura 1.50) y se multiplica por 4 las ordenadas de todos los puntos. Esto da una parábola más angosta, más aguda en su vértice, como se ilustra en la figura. Para llegar a la forma correcta, deben localizarse varios puntos como (0, 0), ($\frac{1}{2}$, 1) y (1, 4).

FIGURA 1.50

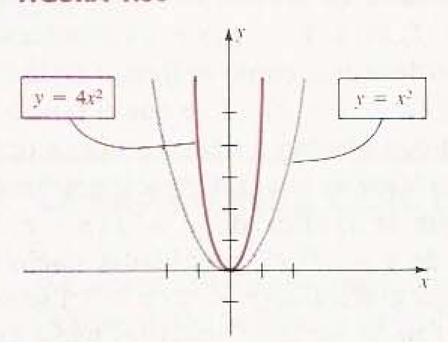
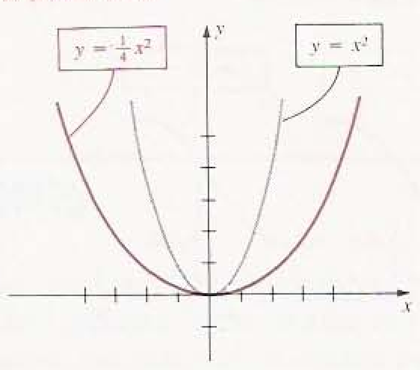


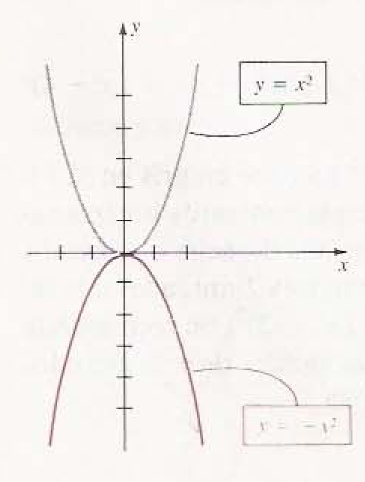
FIGURA 1.51



(b) La gráfica de $y = \frac{1}{4}x^2$ se puede trazar multiplicando por $\frac{1}{4}$ las ordenadas de los puntos de la gráfica de $y = x^2$. Esta gráfica es una parábola más abierta que es más aplanada en su vértice, como se muestra en la Figura 1.51. •

La gráfica de $y = -f(x)$ se obtiene multiplicando por -1 la ordenada de cada punto de la gráfica de $y = f(x)$. Así, cada punto (a, b) de la gráfica de $y = f(x)$ que se encuentra arriba del eje x, determina un punto $(a, -b)$ en la gráfica de $y = -f(x)$ que se encuentra abajo del eje x. Análogamente, si (c, d) está debajo del eje x (es decir, $d < 0$), entonces $(c, -d)$ se encuentra arriba del eje x. La gráfica de $y = -f(x)$ es una **reflexión** de la gráfica de $y = f(x)$, con respecto al eje x.

FIGURA 1.52



EJEMPLO 4 Trazar la gráfica de $y = -x^2$.

Solución La gráfica se puede obtener localizando puntos, pero como la gráfica de $y = x^2$ es bien conocida, se la presenta en tono gris, como se ve en la Figura 1.52, y luego multiplicamos por -1 las ordenadas de todos sus puntos. Esto da la reflexión con respecto al eje x que se indica en la figura. •

Las funciones suelen definirse en términos de sumas, restas, productos y cocientes de varias expresiones. Por ejemplo, si

$$h(x) = x^2 + \sqrt{5x + 1},$$

puede considerarse a $h(x)$ como la suma de los valores de dos funciones más simples f y g definidas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{5x + 1}.$$

La función h se denomina *suma* de f y g.

En general, supongamos que f y g son dos funciones *cualesquiera*. Sea *I la intersección de sus dominios*, es decir, los números que ambos dominios tienen *en común*. La **suma** de f y g es la función h definida por

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

para todo x en I.

Es conveniente denotar a h por el símbolo $f + g$. Como f y g son funciones y no números, el $+$ entre f y g no significa suma de números reales, sino que sirve para indicar que el valor de $f + g$ en x es $f(x) + g(x)$, es decir,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

La **resta** (o **diferencia**) $f - g$ y el **producto** fg de f y g se definen por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{y} \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

para todo x en I. El **cociente** f/g de f entre g está dado por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

para todo x en I y $g(x) \neq 0$.

EJEMPLO 5 Sean $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = 3x + 1$. Encontrar la suma, la resta y el producto de f y g y también el cociente de f y g.

Solución El dominio de f es el intervalo cerrado $[-2, 2]$ y el dominio de g es $\mathbb{R}$. Por lo tanto, la intersección de sus dominios es $[-2, 2]$ y las funciones que se requieren están dadas por

$$(f + g)(x) = \sqrt{4 - x^2} + (3x + 1), \qquad -2 \leq x \leq 2$$

$$(f - g)(x) = \sqrt{4 - x^2} - (3x + 1), \qquad -2 \leq x \leq 2$$

$$(fg)(x) = \sqrt{4 - x^2}(3x + 1), \qquad -2 \leq x \leq 2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{3x + 1}, \qquad -2 \leq x \leq 2, \quad x \neq -\tfrac{1}{3}$$ •

Si g es una función constante tal que $g(x) = c$ para todo x y si f es cualquier función, entonces cf denota el producto de g y f, es decir, $(cf)(x) = cf(x)$ para todo x en el dominio de f. Por ejemplo, si f es la función del Ejemplo 5, entonces $(cf)(x) = c\sqrt{4 - x^2}$, $-2 \leq x \leq 2$. Geométricamente, la función cf es una ampliación y una reflexión, o sólo una reflexión, de la gráfica de f (véanse las Figuras 1.50-1.52).

Las funciones que se presentan en el resto de esta sección: polinomiales (polinomios), racionales, algebraicas, trascendentales y compuestas, son algunas de las funciones más importantes de las matemáticas.

DEFINICIÓN (1.24)

Una función f es un **polinomio** si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales y los exponentes son enteros no negativos.

Se puede pensar en una función polinomial como una suma de funciones cuyos valores están dados por $a_k x^k$ para algún número real a_k y un entero no negativo k.

La expresión en el lado derecho de la igualdad en la Definición (1.24) es un **polinomio en x** (con coeficientes reales) y cada $a_k x^k$ es un **término** del polinomio. El número a_0 es el **término constante**. Se llama *polinomio* tanto la expresión del lado derecho de la igualdad como la función que dicha expresión define. Si $a_n \neq 0$, entonces a_n es el **coeficiente principal** de $f(x)$ y se dice que f (o que $f(x)$) es de **grado n**.

Si un polinomio f es de grado 0, entonces $f(x) = c$ para $c \neq 0$ y por lo tanto, f es una función constante. Si un coeficiente a_k es cero, se abrevia la escritura de (1.24) omitiendo el término $a_k x^k$. Si *todos* los coeficientes de un polinomio son nulos, el polinomio se llama **polinomio cero** y se denota por 0. A este polinomio cero no se le asigna ningún grado.

Si algunos de los coeficientes son negativos, conviene usar signos menos entre los términos correspondientes. Por ejemplo, en vez de escribir $3x^2 + (-5)x + (-7)$, se escribe $3x^2 - 5x - 7$ para este polinomio de grado 2. También se pueden considerar polinomios en otras variables. Por ejemplo, $\frac{2}{5}z^2 - 3z^7 + 8 - \sqrt{5}z^4$ es un polinomio en z de grado 7. Se acostumbra disponer los términos de un polinomio en orden decreciente de potencias: $-3z^7 - \sqrt{5}z^4 + \frac{2}{5}z^2 + 8$.

De acuerdo con la definición de grado, si c es un número real diferente de cero, entonces c es un polinomio de grado 0. Estos polinomios (junto con el polinomio cero) se denominan **polinomios constantes**.

Si $f(x)$ es un polinomio de grado 1, entonces $f(x) = ax + b$ para $a \neq 0$. Sabemos por la Sección 1.3 que la gráfica de f es una recta y, de acuerdo con ello, se dice que f es una **función lineal**.

Todo polinomio $f(x)$ de grado 2 puede escribirse

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde $a \neq 0$. En este caso, se dice que f es una **función cuadrática**. La gráfica de f, o equivalentemente la de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, es una parábola.

En el Capítulo 4 se presentan métodos de cálculo para estudiar las gráficas de los polinomios de grado mayor que 2.

Una **función racional** es el cociente de dos polinomios. Entonces q es racional si, para todo x en su dominio,

$$q(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$$

en donde $f(x)$ y $h(x)$ son polinomios. El dominio de un polinomio es $\mathbb{R}$, pero el dominio de una función racional consta de todos los números reales excepto los ceros del polinomio que está en el denominador.

Una **función algebraica** es una función que puede expresarse en términos de sumas, restas, productos, cocientes y raíces de polinomios. Por ejemplo, si

$$f(x) = 5x^4 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{x(x^2+5)}{\sqrt{x^3+\sqrt{x}}},$$

entonces f es una función algebraica. Las funciones que no son algebraicas se llaman **trascendentales** (o **trascendentes**). Las funciones trigonométricas, la exponencial y la logarítmica que se estudian más adelante, son ejemplos de funciones trascendentales.

Concluimos esta sección con la descripción de un método importante para definir una función usando otras dos funciones f y g. Sean D, E y K tres conjuntos de números reales. Sea f una función de D a E y sea g una función de E a K. Esto se puede expresar como

$$D \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} K.$$

FIGURA 1.53

Es posible usar f y g para definir una función de D a K.

Para todo x en D, el número $f(x)$ está en E. Como el dominio de g es E, entonces puede determinarse el número $g(f(x))$ y tal número está en K. Asociando x a $g(f(x))$ se obtiene una función de D a K que se llama *composición* de g con f. Esto se ilustra en la Figura 1.53, en donde la flecha gris indica la correspondencia definida de D a K.

A veces se usa un símbolo de operador $\circ$ y se denota la composición como $g \circ f$. La siguiente definición resume lo anterior.

DEFINICIÓN (1.25)

Sea f una función de D a E y sea g una de E a K. La **función composición** $g \circ f$ es la función de D a K definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

para todo x en D. A $g \circ f$ se la llama también **función compuesta de** g **con** f.

(A veces $g \circ f$ se lee "f seguida de g".)

Si el dominio de g es un *subconjunto* E' de E, entonces el dominio de $g \circ f$ consta de todos los x en D tales que $f(x)$ está en E'.

EJEMPLO 6 Sean f y g dadas por $f(x) = x - 2$ y $g(x) = 5x + \sqrt{x}$. Encontrar $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.

Solución Sustituyendo formalmente obtenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x-2) \\ &= 5(x-2) + \sqrt{x-2} \\ &= 5x - 10 + \sqrt{x-2}\end{aligned}$$

El dominio de f es $\mathbb{R}$, pero la última igualdad implica que $(g \circ f)(x)$ es un número real sólo si $x \geq 2$. Por lo tanto, el dominio de la composición $g \circ f$ es el intervalo $[2, \infty)$. •

Dadas f y g, también puede considerarse $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, como se expone en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7 Sean $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$. Encontrar $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

Solución Procedemos como sigue:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(3x + 5)\\ &= (3x + 5)^2 - 1\\ &= 9x^2 + 30x + 24\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2 - 1)\\ &= 3(x^2 - 1) + 5\\ &= 3x^2 + 2\end{aligned}$$ •

Nótese que en el Ejemplo 7, $f(g(x))$ y $g(f(x))$ no son iguales, es decir, $f \circ g \neq g \circ f$.

En algunas aplicaciones hay que expresar una cantidad y como función del tiempo t. A veces es más fácil introducir primero otra variable x y expresar x como función de t, es decir, $x = g(t)$; después expresar y como función de x, —es decir, $y = f(x)$—, y finalmente expresar y como la composición de las funciones f y g, o sea, $y = f(x) = f(g(t))$. Esta situación se plantea en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Un globo esférico de juguete se infla con helio. El radio del globo aumenta a razón de 1.5 cm/s, expresar el volumen V del globo como una función del tiempo t (en segundos, s).

Solución Sea x el radio del globo. Suponiendo que al comenzar el radio es 0, entonces a los t segundos

$$x = 1.5t \qquad \text{(radio del globo a los } t \text{ segundos).}$$

Después de 1 s el radio es 1.5 cm, a los 2 s el radio es 3.0 cm, a los 3 s es 4.5 cm, etcétera.

Ahora escribimos

$$V = \tfrac{4}{3}\pi x^3 \qquad \text{(volumen de una esfera de radio } x\text{).}$$

Esto da una relación de composición de funciones en la que V es una función de x, y x es una función de t. Por sustitución,

$$V = \tfrac{4}{3}\pi x^3 = \tfrac{4}{3}\pi(1.5t)^3 = \tfrac{4}{3}\pi(\tfrac{3}{2}t)^3 = \tfrac{4}{3}\pi(\tfrac{27}{8}t^3).$$

Simplificando llegamos a la siguiente fórmula para V como función de t:

$$V = \tfrac{9}{2}\pi t^3$$ •

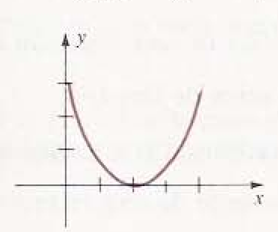
EJERCICIOS 1.5

Ejercicios 1-10: Trace las gráficas de f para los tres valores de c en un mismo sistema coordenado (utilice desplazamientos verticales, desplazamientos horizontales, ampliaciones (o reducciones) y reflexiones).

1. $f(x) = 3x + c;\ c = 0, c = 2, c = -1$
2. $f(x) = -2x + c;\ c = 0, c = 1, c = -3$
3. $f(x) = x^3 + c;\ c = 0, c = 1, c = -2$
4. $f(x) = -x^3 + c;\ c = 0, c = 2, c = -1$
5. $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + c;\ c = 0, c = 4, c = -3$
6. $f(x) = c - |x|;\ c = 0, c = 5, c = -2$
7. $f(x) = 3(x - c);\ c = 0, c = 2, c = 3$
8. $f(x) = -2(x - c)^2;\ c = 0. c = 3, c = 1$
9. $f(x) = (x + c)^3;\ c = 0, c = 2, c = -2$
10. $f(x) = c\sqrt{9 - x^2};\ c = 0, c = 2, c = 3$
11. En la figura se muestra la gráfica de una función f con dominio $0 \le x \le 4$. Trace las gráficas de las siguientes ecuaciones:

(a) $y = f(x + 2)$ (b) $y = f(x - 2)$
(c) $y = f(x) + 2$ (d) $y = f(x) - 2$
(e) $y = 2f(x)$ (f) $y = \frac{1}{2}f(x)$
(g) $y = -2f(x)$ (h) $y = f(x - 3) + 1$

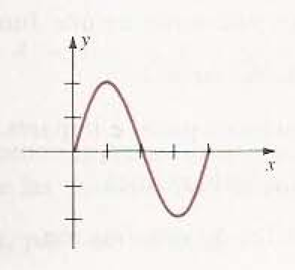
EJERCICIO 11



12. En la figura se muestra la gráfica de una función f con dominio $0 \le x \le 4$. Trace las gráficas de las siguientes ecuaciones:

(a) $y = f(x - 1)$ (b) $y = f(x + 3)$
(c) $y = f(x) - 2$ (d) $y = f(x) + 1$
(e) $y = 3f(x)$ (f) $y = \frac{1}{2}f(x)$
(g) $y = f(x + 2) - 2$ (h) $y = f(2x)$

EJERCICIO 12



Ejercicios 13-18: Determine la suma, la resta, el producto y el cociente de f y g.

13. $f(x) = 3x^2,\ g(x) = 1/(2x - 3)$
14. $f(x) = \sqrt{x + 3},\ g(x) = \sqrt{x + 3}$
15. $f(x) = x + (1/x),\ g(x) = x - (1/x)$
16. $f(x) = x^3 + 3x,\ g(x) = 3x^2 + 1$
17. $f(x) = 2x^3 - x + 5,\ g(x) = x^2 + x + 2$
18. $f(x) = 7x^4 + x^2 - 1,\ g(x) = 7x^4 - x^3 + 4x$

Ejercicios 19-32: Determine $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

19. $f(x) = 2x^2 + 5,\ g(x) = 4 - 7x$
20. $f(x) = 1/(3x + 1),\ g(x) = 2/x^2$
21. $f(x) = x^3,\ g(x) = x + 1$
22. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4},\ g(x) = 7x^2 + 1$
23. $f(x) = 3x^2 + 2,\ g(x) = 1/(3x^2 + 2)$
24. $f(x) = 7,\ g(x) = 4$
25. $f(x) = \sqrt{2x + 1},\ g(x) = x^2 + 3$
26. $f(x) = 6x - 12,\ g(x) = \frac{1}{6}x + 2$
27. $f(x) = |x|,\ g(x) = -5$
28. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1},\ g(x) = x^3 + 1$
29. $f(x) = x^2,\ g(x) = 1/x^2$
30. $f(x) = 1/(x + 1),\ g(x) = x + 1$
31. $f(x) = 2x - 3,\ g(x) = (x + 3)/2$
32. $f(x) = x^3 - 1,\ g(x) = \sqrt[3]{x + 1}$
33. Demuestre que si f es una función lineal y g es una función cuadrática, entonces $f \circ g$ y $g \circ f$ son funciones cuadráticas.
34. Demuestre que si f y g son polinomios de grados m y n, respectivamente, entonces $f \circ g$ es un polinomio de grado mn.

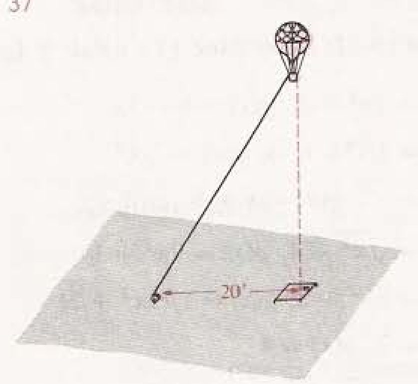
Ejercicios 35-40: Use el método del Ejemplo 8 para resolverlos.

35. Un incendio comienza en un campo abierto y seco, y se extiende en forma de círculo. El radio de tal círculo aumenta a razón de 6 m/min. Exprese el área con fuego como una función del tiempo t.
36. Un cable de 30 m de largo y 10 cm de diámetro está sumergido en el mar. Debido a la corrosión,

el área de la superficie del cable disminuye a razón de 4685 cm^2 por año. Exprese el diámetro del cable como una función del tiempo. (Desprecie la corrosión en los extremos del cable.)

37. Un globo de aire caliente se eleva en forma vertical a medida que una cuerda atada a su base se va soltando a razón de 5 pie/s. La polea por la que pasa la cuerda al soltarse está a 20 pie de distancia de la plataforma donde los pasajeros abordan el globo (véase la figura). Exprese la altura del globo como una función del tiempo.


EJERCICIO 37



38. El diámetro d de un cubo es la distancia entre dos de sus vértices opuestos. Exprese d como una función del lado x del cubo. (*Sugerencia:* Primero exprese la diagonal y de una cara como una función de x.)

39. Consulte el Ejercicio 59 de la Sección 1.4. Cuando el avión ha recorrido 500 pie por la pista, ha alcanzado una velocidad de 150 pie/s (alrededor de 100 mi/h o 160 km/h), que mantendrá hasta que despegue. Exprese la distancia d del avión a la torre de control como una función del tiempo t (en segundos). (*Sugerencia:* En el Ejercicio 59 de la Sección 1.4, escriba primero x como una función de t.)

40. Consulte el Ejercicio 56 de la Sección 1.4. El equilibrista camina por el alambre hacia arriba a razón de 30 cm/s. El cable está atado al poste a 10 m del suelo. Exprese la altura h del alambrista sobre el suelo como una función del tiempo. (*Sugerencia:* Denote por d la distancia total que ha recorrido sobre el cable. Exprese primero d como una función de t y luego h como una función de d.)

1.6 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Números racionales e irracionales.
2. Recta coordenada.
3. Un número real a es mayor que un número real b.
4. Desigualdades.
5. El valor absoluto de un número real.
6. Desigualdad del Triángulo.
7. La notación de conjuntos.
8. Variable.
9. Intervalos (abierto, cerrado, semiabierto, infinito).
10. Par ordenado.
11. Sistema coordenado rectangular en un plano.
12. Abscisa y ordenada de un punto.
13. Fórmula de la Distancia.
14. Fórmula del Punto Medio.
15. Gráfica de una ecuación en x y y.
16. Criterios de simetría.
17. Ecuación de la circunferencia.
18. Pendiente de una recta.
19. Ecuación de la recta dados un punto y la pendiente.
20. Ecuación de la recta dadas la pendiente y la ordenada en el origen.
21. Función.
22. Dominio de una función.
23. Contradominio de una función.
24. Función constante.
25. Funciones pares e impares.
26. Función biunívoca.
27. Gráfica de una función.

28. Función definida parte por parte.

29. Desplazamientos verticales y horizontales de las gráficas.

30. Ampliaciones y reflexiones de las gráficas.

31. Suma, resta, producto y cociente de dos funciones.

32. Polinomios.

33. Funciones racionales.

34. Composición de dos funciones.

EJERCICIOS 1.6

Ejercicios 1-8: Resuelva la desigualdad y exprese la solución en términos de intervalos.

1. $4 - 3x > 7 + 2x$
2. $\frac{7}{2} > \frac{1-4x}{5} > \frac{3}{2}$
3. $|2x - 7| \leq 0.01$
4. $|6x - 7| > 1$
5. $2x^2 < 5x - 3$
6. $\frac{2x^2 - 3x - 20}{x + 3} < 0$
7. $\frac{1}{3x - 1} < \frac{2}{x + 5}$
8. $x^2 + 4 \geq 4x$

9. Si se tienen los tres puntos $A(2, 1)$, $B(-1, 4)$ y $C(-2, -3)$.
   (a) demuestre que A, B y C son los vértices de un triángulo rectángulo y calcule su área.
   (b) encuentre las coordenadas del punto medio de AB.
   (c) calcule la pendiente de la recta que pasa por B y C.

Ejercicios 10-13: Trace la gráfica de la ecuación y discuta su simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen.

10. $3x - 5y = 10$
11. $x^2 + y = 4$
12. $x = y^3$
13. $|x + y| = 1$

Ejercicios 14-17: Trace la gráfica del conjunto W.

14. $W = \{(x, y)\colon\ x > 0\}$
15. $W = \{(x, y)\colon\ y > x\}$
16. $W = \{(x, y)\colon\ x^2 + y^2 < 1\}$
17. $W = \{(x, y)\colon\ |x - 4| < 1,\ |y + 3| < 2\}$

Ejercicios 18-20: Encuentre la ecuación de una circunferencia que satisfaga las condiciones dadas.

18. Centro $C(4, -7)$, pasa por el origen.

19. Centro $C(-4, -3)$, es tangente a la recta con ecuación $x = 5$.

20. Pasa por los tres puntos $A(-2, 3)$, $B(4, 3)$ y $C(-2, -1)$.

21. Encuentre el centro y el radio de la circunferencia con ecuación
$$x^2 + y^2 - 10x + 14y - 7 = 0.$$

Ejercicios 22-26: Dados los puntos $A(-4, 2)$, $B(3, 6)$ y $C(2, -5)$, resuelva los problemas.

22. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a la que pasa por A y C.

23. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por B y es perpendicular a la que pasa por A y C.

24. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por C y por el punto medio del segmento AB.

25. Obtenga la ecuación de la recta que pasa por A y es paralela al eje y.

26. Obtenga la ecuación de la recta que pasa por C y es perpendicular a la recta con ecuación $3x - 10y + 7 = 0$.

Ejercicios 27-30: Halle el dominio de f.

27. $f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - x}$
28. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$
29. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 5\sqrt{7 - x}}$
30. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x - 2)}$

31. Sea $f(x) = 1/\sqrt{x + 1}$. Encuentre lo siguiente.

(a) $f(1)$ (b) $f(3)$ (c) $f(0)$

(d) $f(\sqrt{2} - 1)$ (e) $f(-x)$ (f) $-f(x)$

(g) $f(x^2)$ (h) $(f(x))^2$

Ejercicios 32-36: Trace la gráfica de f.

32. $f(x) = 1 - 4x^2$

33. $f(x) = 100$

34. $f(x) = -1/(x + 1)$

35. $f(x) = |x + 5|$

36. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

37. Trace la gráfica de cada ecuación usando desplazamientos, ampliaciones (o reducciones) o reflexiones:

(a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = \sqrt{x + 4}$

(c) $y = \sqrt{x} + 4$ (d) $y = 4\sqrt{x}$

(e) $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$ (f) $y = -\sqrt{x}$

38. Determine si f es par, si es impar, o si no es par ni impar:

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 4x}$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 3x^2 + 5}$

(d) $f(x) = 0$

39. Sea $f(x) = 5 - 7x$. Demuestre que f es biunívoca.

Ejercicios 40-42: Determine $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(fg)(x)$, $(f/g)(x)$, $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

40. $f(x) = x^2 + 3x + 1$, $g(x) = 2x - 1$

41. $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = \sqrt{2x + 5}$

42. $f(x) = 5x + 2$, $g(x) = 1/x^2$



CAPÍTULO 2

LÍMITES DE FUNCIONES

*El concepto de **límite de una función** es una de las nociones fundamentales que distinguen al Cálculo de otras áreas de las matemáticas como el álgebra o la trigonometría. Se puede desarrollar fácilmente una idea intuitiva de los límites. Por este motivo, la exposición en las dos primeras secciones es informal. La definición matemáticamente rigurosa de límite se presenta en la Sección 2.3. El resto del capítulo trata algunas propiedades importantes de los límites.*

2.1 INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

En el cálculo y sus aplicaciones se analiza la forma en que varían ciertas cantidade y si éstas *tienden* a valores específicos bajo ciertas condiciones. Estas cantidades a me nudo involucran los valores de algunas funciones. Para hacer este análisis se utiliza los conceptos de *derivada* (Capítulo 3) o de *integral definida* (Capítulo 5).

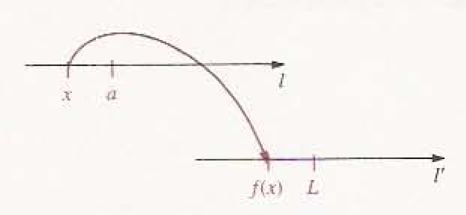
La definición de derivada depende de la noción de *límite* de una *función*. Comen zaremos con una presentación intuitiva. La definición formal de límite aparece en l Sección 2.3.

Sea a un número real contenido en un intervalo abierto y sea f una función definid en todo el intervalo, excepto posiblemente en a mismo. A veces es de interés conoce los valores $f(x)$ de la función *para x muy cercano a a, pero no necesariamente igu a a*. De hecho, en muchos casos, el número a no se encuentra en el dominio de f, e decir, $f(a)$ no está definido. Informalmente hablando, a veces se formula la siguien pregunta: ¿Cuando x se acerca cada vez más a a (pero $x \neq a$), acaso $f(x)$ se acerc también a un número L? Si la respuesta es *afirmativa* se dice que *$f(x)$ tiende a L cua do x tiende a a*, o que *el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L*, y se escribe:

NOTACIÓN DE LÍMITE (2.1)

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

FIGURA 2.1



Si se sabe que $f(x)$ tiende a algún número cuando x tien a a, pero tal número no se conoce, entonces se dice que límite de $f(x)$ cuando x tiende a a *existe*, o simplemente q $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe*.

Representaremos el dominio y el contradominio de la fu ción f con puntos sobre dos rectas coordenadas l y l', co se ilustra en la Figura 2.1 (véase también la Figura 1.37). $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces, cuando x tiende a a, enton $f(x)$ tiende a L. Cuando esto sucede no importa el modo en que x tiende a a. A en la Figura 2.1 x puede acercarse a a por la izquierda (lo que se denota por $x \to a^-$ o por la derecha (lo que se señala por $x \to a^+$), o bien oscilando de un lado a otro a. Análogamente, el valor $f(x)$ de la función puede acercarse a L de muchas mane diferentes, dependiendo de las propiedades de f.

La noción de límite es fundamental para el estudio de muchos conceptos de las m temáticas y de la física. Para ilustrar esto estudiaremos dos problemas:

(i) Encontrar la recta tangente a una curva en un punto P dado.

(ii) Encontrar la velocidad en cualquier instante de un objeto que se mueve so una trayectoria recta.

En la geometría plana, la recta tangente l en un punto P sobre una circunferen se puede definir como la recta que tiene solamente un punto P en común con tal circ ferencia, como se ilustra en la Figura 2.2. Esta definición no se puede aplicar a cu quier gráfica, ya que una recta tangente puede cortar a una gráfica varias veces, co se muestra en la Figura 2.3 (véase también el Ejercicio 11).

FIGURA 2.2

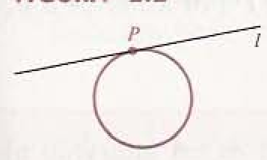
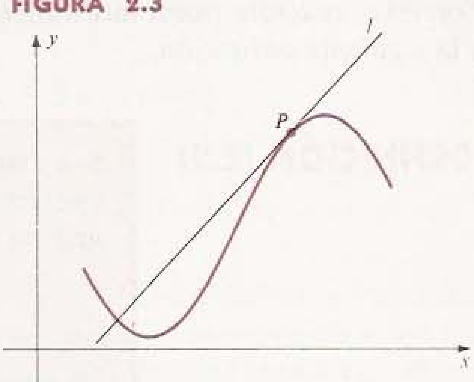


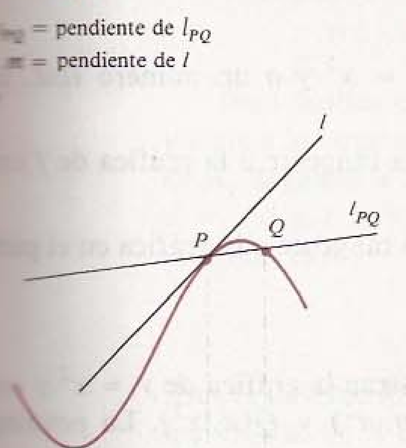
FIGURA 2.3



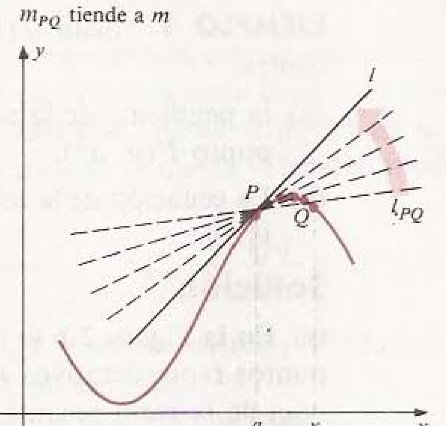
Para identificar la recta tangente l a la gráfica de una función en un punto P, basta especificar la pendiente m de l, ya que ésta y el punto P determinan completamente a la recta. Para encontrar m se escoge otro punto Q sobre la gráfica y se considera a la recta l_{PQ} que pasa por P y Q, como en la Figura 2.4(i). La recta l_{PQ} es una **recta secante** de la gráfica.

FIGURA 2.4

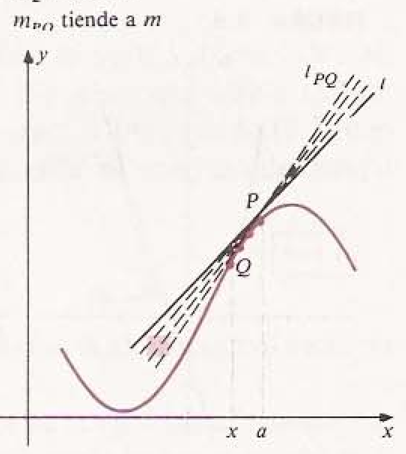
(i) m_{PQ} = pendiente de l_{PQ}
m = pendiente de l



(ii) l_{PQ} tiende a l
m_{PQ} tiende a m

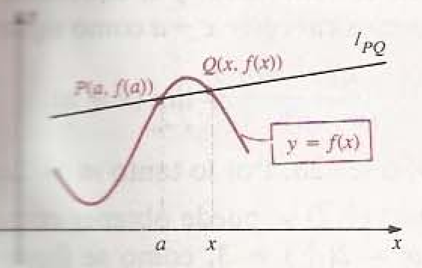


(iii) l_{PQ} tiende a l
m_{PQ} tiende a m



Sea m_{PQ} la pendiente de l_{PQ}. Ahora se considera la variación de m_{PQ} cuando Q se acerca a P. Si Q tiende a P por la derecha se tiene la situación ilustrada en la Figura 2.4(ii), en la que se señalan varias posiciones de la recta secante l_{PQ} correspondientes a las diversas posiciones de Q, por medio de línea punteada. Se ve que para Q cercano a P, la pendiente m_{PQ} debe ser muy parecida a la pendiente m de l. En la Figura 2.4(iii) Q tiende a P por la izquierda y, nuevamente, se ve que m_{PQ} se acerca a m. Estas observaciones sugieren que si m_{PQ} tiende a algún valor fijo cuando Q tiende a P, entonces ese valor se debe usar para *definir* la pendiente de la recta tangente l en P.

FIGURA 2.5



Si la función f está definida en un intervalo abierto que contiene a a, entonces marcamos las coordenadas de P y Q como en la Figura 2.5. Usando la fórmula para la pendiente (1.13), se obtiene que la pendiente de la recta secante l_{PQ} es

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Con esta notación, puede sustituirse la frase *Q tiende a P* por *x tiende a a*. Así se llega a la siguiente definición.

DEFINICIÓN (2.2)

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a a. La **pendiente m de la recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre y cuando el límite exista.

Nótese que en la fórmula de la Definición (2.2) no se usa el límite de $f(x)$ sino el de la expresión $[f(x) - f(a)]/(x - a)$. Obsérvese también que al estudiar este límite $x \neq a$. En efecto, si se toma $x = a$, entonces $P = Q$ y m_{PQ} no existe.

FIGURA 2.6

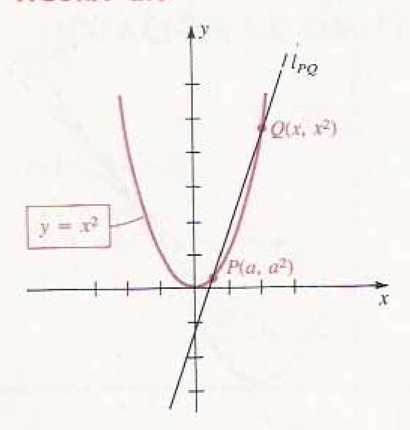
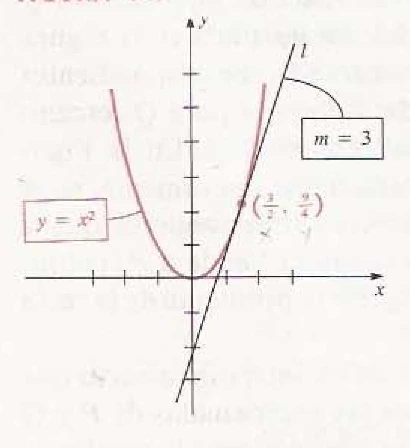


FIGURA 2.7



EJEMPLO 1 Sean $f(x) = x^2$ y a un número real. Encontrar

(a) la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, a^2)$.

(b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$.

Solución

(a) En la Figura 2.6 se ilustran la gráfica de $y = x^2$ y unos puntos representativos $P(a, a^2)$ y $Q(x, x^2)$. La pendiente m_{PQ} de la recta secante l_{PQ} es

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - a^2}{x - a}.$$

De la Definición (2.2), se obtiene que la pendiente m de la recta tangente en P es

$$m = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}.$$

Para encontrar el límite se necesita cambiar la forma de la expresión. Como al tomar el límite $x \neq a$, resulta que $x - a \neq 0$, y entonces podemos dividir el numerador y el denominador entre $x - a$, es decir, podemos *cancelar* $x - a$ como sigue:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x + a)(x - a)}{(x - a)} = \lim_{x \to a} (x + a).$$

Cuando x tiende a a la expresión $x + a$ tiende a $a + a$, o sea $2a$. Por lo tanto $m = 2a$.

(b) Como la pendiente de la recta tangente l en el punto $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ se puede obtener como el caso especial en que $a = \frac{3}{2}$, tenemos que $m = 2a = 2(\frac{3}{2}) = 3$, como se ilustra

en la Figura 2.7. Usando la Forma de Punto y Pendiente (1.15) se obtiene la siguiente ecuación para l:

$$y - \tfrac{9}{4} = 3(x - \tfrac{3}{2}).$$

Simplificando queda

$$12x - 4y - 9 = 0 \quad \bullet$$

Consideremos ahora el problema (ii), es decir, definir la velocidad instantánea de un objeto que se mueve sobre una línea recta. El movimiento sobre una recta se llama **movimiento rectilíneo**. Es fácil calcular la *velocidad media* v_{med} durante un intervalo de tiempo. Basta usar la fórmula $d = vt$, donde v es la velocidad media, t es la magnitud del intervalo de tiempo y d es la distancia total recorrida. Despejando v se obtiene:

VELOCIDAD MEDIA (2.3)

$$v_{\text{med}} = \frac{d}{t}$$

Para ilustrar esto, supongamos que un automóvil sale de la ciudad A a la 1:00 P.M. y viaja a lo largo de una carretera recta hasta otra ciudad B que se encuentra a 150 km de A, llegando a las 4:00 P.M., como se ilustra en la Figura 2.8. Aplicando (2.3) con $d = 150$ y $t = 3$ (horas), se ve que la velocidad media durante el intervalo de tiempo indicado es

$$v_{\text{med}} = \frac{150}{3} = 50 \text{ km/h}.$$

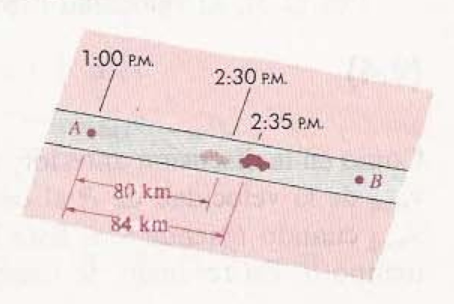
Ésta es la velocidad que si se mantuviera por 3 horas, permitiría al automóvil recorrer los 150 km de A a B, en ese lapso.

La velocidad media no da ninguna información acerca de la velocidad instantánea. Por ejemplo, a las 2:30 (P.M.) el velocímetro del automóvil pudo haber marcado 40 o 30, o el automóvil pudo haber estado en reposo. Si se desea determinar la velocidad a la que el automóvil viaja a las 2:30, se necesita alguna información acerca del movimiento o la posición *alrededor* de esta hora. Por ejemplo, supongamos que a las 2:30 el automóvil se encuentra a 80 km de A y que a las 2:35 está a 84 km de A, como se ilustra en la Figura 2.9. La magnitud t del intervalo de tiempo de las 2:30 a las 2:35

FIGURA 2.8



FIGURA 2.9

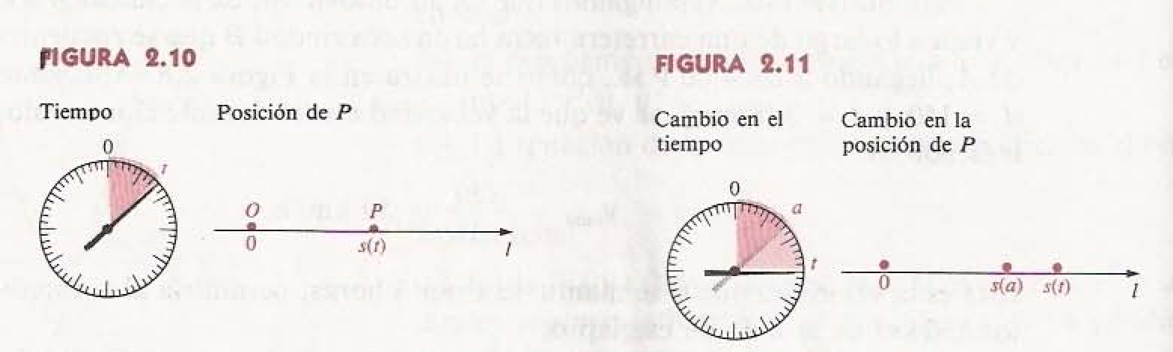


es de 5 min, o sea $\frac{1}{12}$ hora, y la distancia d es 4 km. Sustituyendo en (2.3) se obtiene que la velocidad media durante este intervalo es

$$v_{\text{med}} = \frac{4}{\frac{1}{12}} = 48 \text{ km/h}.$$

Sin embargo, éste todavía no es el valor exacto de la velocidad a las 2:30 ya que, por ejemplo, el automóvil podría haber ido muy lentamente a las 2:30 y luego haber aumentado su velocidad considerablemente logrando llegar a estar a 84 km de A a las 2:35 P.M. Evidentemente, se obtiene una mejor aproximación tomando la velocidad media durante un intervalo de tiempo más pequeño, digamos de las 2:30 a las 2:31. Se ve que el mejor procedimiento sería tomar intervalos de tiempo cada vez más pequeños alrededor de las 2:30 P.M. y calcular la velocidad media en cada intervalo. Esto lleva a un proceso límite parecido al de las rectas tangentes.

Para basar esta discusión en conceptos matemáticos, supondremos que la posición de un objeto con movimiento rectilíneo se puede representar por un *punto P* sobre una recta coordenada l. A veces hablaremos del movimiento del *punto P* sobre l o del movimiento de un objeto sobre l, cuya posición está dada por P. Suponemos además que se conoce la posición de P en todo instante dentro de un intervalo de tiempo. Si $s(t)$ denota la coordenada de P al tiempo t, entonces esta función s se llama **función de posición** de P. Supongamos que se mide el tiempo con un reloj. Entonces para cada instante t, el punto P está a $s(t)$ unidades del origen, como se ilustra en la Figura 2.10.



Para definir la velocidad de P al tiempo a, comenzamos por calcular la velocidad media en un intervalo de tiempo (pequeño) alrededor de a. Consideremos pues los tiempos a y t, donde t está cerca de a pero $t \neq a$. Las posiciones de P correspondientes a estos tiempos son $s(a)$ y $s(t)$, como se muestra en la Figura 2.11, y por lo tanto el cambio en la posición de P es $s(t) - s(a)$. Este número puede ser positivo, negativo o cero, según que la posición de P al tiempo t sea a la derecha de, a la izquierda de o la misma que la posición al tiempo a. El número $s(t) - s(a)$ no es necesariamente igual a la distancia recorrida por P entre los instantes a y t ya que, por ejemplo, P podría haber ido más allá del punto correspondiente a $s(t)$ y haber regresado a este punto al tiempo t.

Por (2.3), la velocidad media de P entre los tiempos a y t es

(2.4)
$$v_{\text{med}} = \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$$

Como en la discusión anterior, cuanto más cerca esté t de a, tanto más próxima estará v_{med} de la velocidad de P al tiempo a. Así, *definimos* la velocidad como el límite de v_{med} cuando t tiende a a. Este límite se llama también *velocidad instantánea* de P al tiempo a. En resumen, se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN (2.5)

Si un punto P se mueve sobre una recta coordenada l de manera que su coordenada al tiempo t es $s(t)$, entonces la **velocidad** $v(a)$ de P al tiempo a es

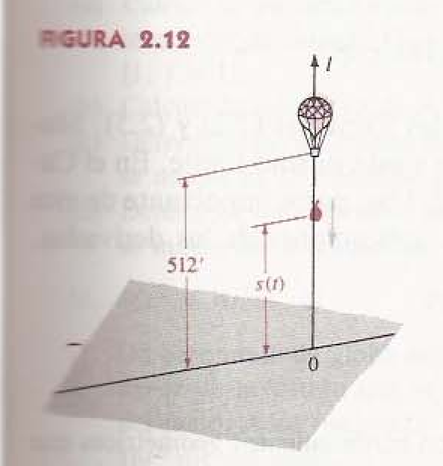
$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$$

siempre y cuando el límite exista.

Si $s(t)$ se mide en centímetros (cm) y t en segundos (s), entonces las unidades de la velocidad son centímetros por segundo (cm/s). Si $s(t)$ se mide en kilómetros o en millas y t en horas, entonces la velocidad está en kilómetros por hora (km/h) o en millas por hora (mi/h), respectivamente. Por supuesto, se pueden usar otras unidades.

Regresaremos al concepto de velocidad en el Capítulo 4, donde se demostrará que si la velocidad es positiva en un intervalo de tiempo, entonces el punto se mueve en la dirección positiva de l, mientras que si la velocidad es negativa, el punto se mueve en la dirección negativa. Aunque no se han demostrado se usarán en el siguiente ejemplo.

FIGURA 2.12



EJEMPLO 2 Desde un globo de aire caliente que se halla a una altura de 512 pie sobre el suelo, se deja caer un saco de arena del lastre. Si se desprecia la fricción del aire, la distancia $s(t)$ del suelo al saco a los t segundos está dada por $s(t) = -16t^2 + 512$. Calcular la velocidad del lastre en

(a) $t = a$ segundos **(b)** $t = 2$ s **(c)** el momento en que llega al suelo.

Solución

(a) Como se muestra en la Figura 2.12, podemos considerar que el lastre se mueve sobre una recta coordenada vertical l cuyo origen se encuentra al nivel del suelo. Nótese que en el momento en que se suelta, $t = 0$ y

$$s(0) = -16(0) + 512 = 512 \text{ pie.}$$

Usamos la Definición (2.5) para calcular la velocidad del saco en $t = a$. Primero tomamos la velocidad media y simplificamos:

$$\frac{s(t) - s(a)}{t - a} = \frac{(-16t^2 + 512) - (-16a^2 + 512)}{t - a}$$

$$= \frac{-16t^2 + 16a^2}{t - a} = \frac{-16(t^2 - a^2)}{t - a}.$$

Por la Definición (2.5), la velocidad $v(a)$en $t = a$ es

$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a} = \lim_{t \to a} \frac{-16(t^2 - a^2)}{t - a}$$

$$= \lim_{t \to a} \frac{-16(t - a)(t + a)}{t - a} = \lim_{t \to a} [-16(t + a)]$$

en donde hemos cancelado el factor $t - a$ (como en el Ejemplo 1(a)), porque como $t \neq a$ durante el proceso límite, $t - a \neq 0$. Cuando t tiende a a, $t + a$ tiende a $a + a$, o sea $2a$. Por lo tanto

$$v(a) = -16(2a) = -32a \text{ pie/s.}$$

El signo negativo indica que el movimiento del lastre es en la dirección negativa de l (hacia abajo).

(b) Para calcular la velocidad en $t = 2$ sustituimos a por 2 en la fórmula $v(a) = -32a$, obteniendo así

$$v(2) = -32(2) = -64 \text{ pie/s.}$$

(c) El saco de lastre llega al suelo cuando

$$s(t) = -16t^2 + 512 = 0 \quad \text{o bien} \quad t^2 = \frac{512}{16} = 32.$$

Esto da $t = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5.7$ s. Usando la fórmula $v(a) = -32a$ de la parte (a) con $a = 4\sqrt{2}$, concluimos que la velocidad al llegar al suelo es

$$v(4\sqrt{2}) = -32(4\sqrt{2}) = -128\sqrt{2} \approx 181 \text{ pie/s.} \quad \bullet$$

El lector debe notar la semejanza que existe entre las fórmulas (2.2) y (2.5). Muchas aplicaciones en las matemáticas y en la física llevan a este mismo límite. En el Capítulo 3 se llama a este límite la *derivada* de la función f. Una parte importante de este libro está dedicada al estudio de las propiedades y las aplicaciones de las derivadas.

EJERCICIOS 2.1

Ejercicios 1-4: (a) Use (2.2) para calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, y (b) encuentre una ecuación para la recta tangente en el punto $P(2, f(2))$.

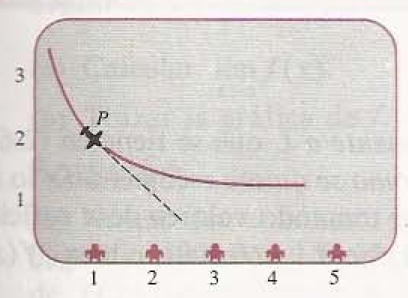
1. $f(x) = 5x^2 - 4$
2. $f(x) = 3 - 2x^2$
3. $f(x) = x^3$
4. $f(x) = x^4$

Ejercicios 5-8: (a) Use (2.2) para calcular la pendiente de la recta tangente en el punto con abscisa a sobre la gráfica de la ecuación; (b) encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto P; (c) trace la gráfica y la recta tangente en P.

5. $y = 3x + 2$, $P(1, 5)$
6. $y = \sqrt{x}$, $P(4, 2)$
7. $y = 1/x$, $P(2, \frac{1}{2})$
8. $y = x^{-2}$, $P(2, \frac{1}{4})$
9. Demuestre con razonamientos geométricos que la gráfica de $y = |x|$ no tiene recta tangente en el punto (0, 0).
10. Demuestre con razonamientos geométricos que la gráfica de la función mayor entero (véase la Figura 1.46) no tiene recta tangente en el punto $P(1,1)$.
11. Consulte el Ejercicio 3. Demuestre que la recta tangente a la gráfica de $y = x^3$ en el punto $P(-1, -1)$ corta a la gráfica en $(-1, -1)$ y (2, 8).
12. Consulte el Ejemplo 1. Trace la gráfica de $y = x^2$ y las rectas tangentes en los puntos con abscisas $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3. ¿En cuál de los puntos de la gráfica la pendiente de la recta tangente es igual a 6?
13. En un juego de video para niños, aparecen aviones en la pantalla volando de izquierda a derecha sobre la trayectoria $y = 1 + (1/x)$, que pueden disparar balas en la dirección de la tangente para alcanzar a unos objetivos colocados sobre el eje x en $x = 1, 2, 3, 4$ y 5. ¿Si un juga

dor dispara cuando el avión se encuentra en $P(1,2)$, entonces da en alguno de los blancos? ¿Y si dispara estando en $(\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$?

EJERCICIO 13



14. Sea $f(x) = ax + b$. Demuestre que la recta tangente a la gráfica de f en cualquier punto coincide con la gráfica de f.

Ejercicios 15-16: La posición de un punto P que se mueve sobre una recta coordenada l está dada por $s(t)$ con t en segundos y $s(t)$ en centímetros.

(a) Calcule la velocidad media de P en los siguientes intervalos de tiempo: [1, 1.2]; [1, 1.1]; [1, 1.01]; [1, 1.001].
(b) Calcule la velocidad de P en $t = 1$.
(c) Determine los intervalos de tiempo en los que P se mueve en la dirección positiva.
(d) Determine los intervalos de tiempo en los que P se mueve en la dirección negativa.

15. $s(t) = 4t^2 + 3t$. 16. $s(t) = t^3$.

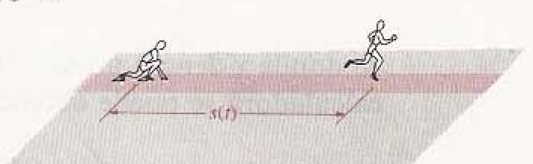
17. Un aeronauta de globo suelta un saco de lastre desde un aeróstato que se encuentra a 160 pies del suelo. A los t segundos el lastre está a $160 - 16t^2$ pie del suelo.

(a) Calcule la velocidad del saco para $t = 1$.
(b) ¿Qué velocidad tiene el saco cuando llega al suelo?

18. Se dispara un proyectil directamente hacia arriba desde el suelo con una velocidad de 40 m/s. Su distancia sobre el suelo a los t segundos es $40t\text{-}4.5t^2$ metros. ¿Cuál es la velocidad del proyectil en $t = 2$, $t = 3$ y $t = 4$? ¿En qué momento alcanza la altura máxima? ¿Cuándo choca con el suelo? ¿Cuál es su velocidad en ese momento?

19. Un atleta corre los cien metros planos de manera que la distancia $s(t)$ que ha recorrido a los t segundos está dada por $\frac{1}{5}t^2 + 8t$ metros (véase la figura). Calcule la velocidad del corredor (a) en el momento de la salida ($t = 0$), (b) a los 5 s de la salida y (c) al cruzar la meta.

EJERCICIO 19



20. (a) Pruebe que si la posición de un objeto que se mueve sobre una recta coordenada está dada por una función polinomial de grado 1, entonces la velocidad es constante.
(b) Demuestre que si la función de posición de una partícula en movimiento rectilíneo es constante, entonces la velocidad es 0 en todo tiempo. Describa el movimiento de la partícula.

2.2 DEFINICIÓN INFORMAL DE LÍMITE

En la sección anterior se vio que las definiciones de recta tangente y de velocidad dependen de la noción de *límite* de una función. En el resto de este capítulo se estudiarán los límites con más detalle. Comenzamos con una descripción informal del concepto de límite. En la siguiente sección se hará una presentación matemáticamente rigurosa.

En la Sección 2.1 se dijo que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que *el valor de la función* $f(x)$ *tiende a* L *cuando* x *tiende a* a. A continuación se da una descripción un poco más precisa que es todavía informal.

DEFINICIÓN (2.6) INFORMAL DE LÍMITE

Sea a en un intervalo abierto, y sea f una función definida en todo el intervalo excepto posiblemente en a, y L un número real. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

significa que $f(x)$ puede acercarse arbitrariamente a L si x se elige suficientemente cercano a a (pero $x \neq a$).

La frase $f(x)$ *puede acercarse arbitrariamente a* L que se tiene en (2.6) significa que $|f(x) - L|$ *se puede hacer tan pequeño como se quiera* escogiendo x lo suficientemente cercano a a (pero $x \neq a$). Por ejemplo, tomando valores de x suficientemente cercanos a a (con $x \neq a$) se puede hacer que $|f(x) - L| < 0.0001$, o bien $|f(x) - L| < 0.00001$, etcétera.

Como en la sección anterior, se dice que $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe* si (2.6) se satisface para algún número (posiblemente desconocido) L.

En la Sección 8.2, al estudiar los límites de las funciones trigonométricas se demostrará que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

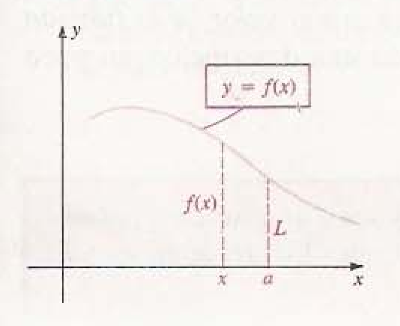
en donde x denota un número real que es el *valor en radianes* de un ángulo. Con una calculadora se puede obtener la siguiente tabla que ilustra este importante resultado.

x	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
± 0.1	0.998334166
± 0.01	0.999983333
± 0.001	0.999999833
± 0.0001	0.999999995
± 0.00001	1
± 0.000001	1

Esta tabla puede malinterpretarse por varias razones. Primero debido a que la calculadora redondea los resultados, parece que $(\operatorname{sen} x)/x$ es *igual* a 1 si x está entre 0 y 0.00001. Esto *no es cierto*. Se podrá deducir del análisis en la Sección 8.2 que $(\operatorname{sen} x)/x < 1$ para todo x. Luego, aunque la tabla indica que $(\operatorname{sen} x)/x$ tiende a 1 cuando x tiende a 0, no se puede estar seguro de este hecho si sólo se han sustituido algunos valores de x. Podría ser que $(\operatorname{sen} x)/x$ se alejara de 1 para valores de x más cercanos a 0 que los que se usaron en la tabla.

Aunque una calculadora puede usarse para tener una idea del valor de un límite, no sirve para *demostrar* que el límite existe. Es necesario contar con una teoría matemática precisa de los límites que no dependa de instrumentos mecánicos o de conjeturas. En el resto de este capítulo se desarrolla tal teoría.

FIGURA 2.13



La gráfica de la función f en la Figura 2.13 muestra un caso en el que $\lim_{x \to a} f(x) = L$. En ella no hace falta ubicar un punto correspondiente a $x = a$ porque al tomar el límite *el valor de* $f(a)$ *no tiene ninguna importancia*. Como

se verá en los ejemplos, $f(a)$ puede ser igual a L, diferente de L o bien no existir, dependiendo de la naturaleza de la función f.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$.

(a) Calcular $\lim_{x\to a} f(x)$.

(b) Trazar la gráfica de f y comprobar gráficamente el límite en la parte (a).

Solución

(a) Nótese que el número 9 no está en el dominio de f, ya que al sustituir x por 9 se llega a la expresión 0/0 que no tiene sentido. Para evaluar el límite cambiamos la forma de $f(x)$ racionalizando el denominador como sigue:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 9} f(x) &= \lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}\\ &= \lim_{x\to 9}\left(\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}\cdot\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}\right)\\ &= \lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9}\end{aligned}$$

Por la Definición (2.6), para calcular el límite de $f(x)$ cuando $x \to 9$, podemos suponer que $x \neq 9$. Por lo tanto, $x - 9 \neq 0$ y es posible dividir el numerador y el denominador entre $x - 9$; es decir, podemos *cancelar* la expresión $x - 9$. Esto da

$$\lim_{x\to 9} f(x) = \lim_{x\to 9}(\sqrt{x}+3) = \sqrt{9}+3 = 6$$

FIGURA 2.14

y = f(x)
6
f(x)
9 x
x

(b) Al racionalizar el denominador de $f(x)$ como en la parte (a), vemos que la gráfica de f es la misma que la de la ecuación $y = \sqrt{x} + 3$, *excepto por el punto* (9,6). El hecho de que (9,6) no está en la gráfica de f se ilustra con un pequeño círculo claro en la Figura 2.14. Cuando x se acerca a 9, la ordenada $f(x)$ en la gráfica de f se acerca al número 6. Nótese que $f(x)$ nunca toma el valor 6, sin embargo, se puede hacer tan cercano a 6 como se desee escogiendo x suficientemente cerca de 9. •

EJEMPLO 2 Sea $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+2}{5x^2-7x-6}$. Calcular $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Solución El número 2 no está en el dominio de f porque al sustituir x por 2 se obtiene la expresión sin sentido 0/0. Factorizando el numerador y el denominador,

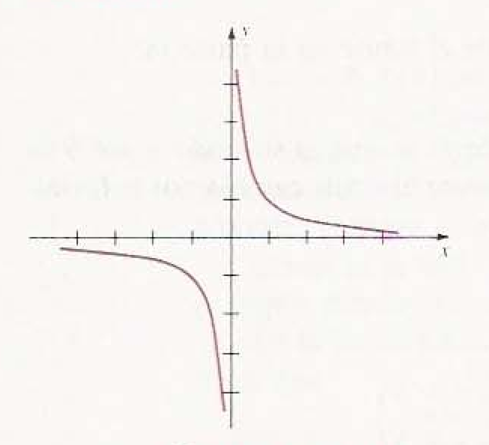
$$f(x) = \frac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(5x+3)}.$$

En este paso no puede cancelarse el factor $x - 2$, sin embargo, al tomar el *límite* de $f(x)$ cuando $x \to 2$ *sí* se puede cancelar ya que según la Definición (2.6), $x \neq 2$ y entonces $x - 2 \neq 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{5x^2 - 7x - 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(5x+3)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2x-1}{5x+3} = \frac{3}{13}$$ •

FIGURA 2.15



La función racional f definida por $f(x) = 1/x$ proporciona un ejemplo en el que el límite no existe cuando x tiende a 0. Consultando la gráfica de f en la Figura 2.15 (véase también la Figura 1.44) se capta que al dar a x valores cercanos a 0 (con $x \neq 0$), $|f(x)|$ no está acotado; es decir, crece sin frontera. En la Sección 4.6 se estudiarán las propiedades de las funciones racionales.

Los siguientes límites *unilaterales* son también de interés.

LÍMITE POR LA IZQUIERDA (2.7)

Sea f una función definida en un intervalo abierto (c, a). Entonces

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$$

significa que $f(x)$ puede acercarse arbitrariamente a L_1 escogiendo x suficientemente cerca de a, con $x < a$.

LÍMITE POR LA DERECHA (2.8)

Sea f una función definida en un intervalo abierto (a, c). Entonces

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$$

significa que $f(x)$ puede acercarse arbitrariamente a L_2 escogiendo x suficientemente cerca de a con $x > a$.

A continuación se muestran algunas ilustraciones gráficas de los límites unilaterales. En la Figura 2.16 *x tiende a a por la izquierda*. En la Figura 2.17 *x tiende a a por la derecha*.

FIGURA 2.16

Límite por la izquierda: $\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$

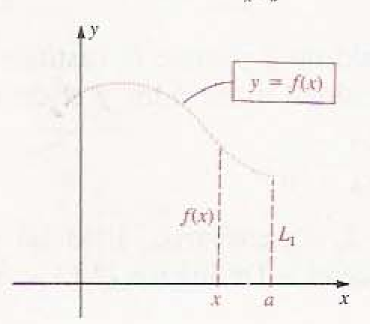
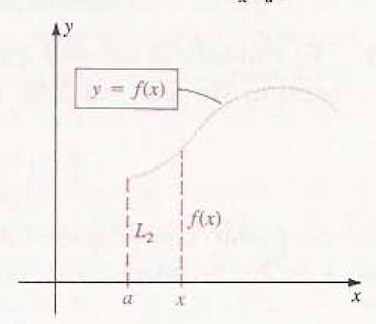


FIGURA 2.17

Límite por la derecha: $\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$



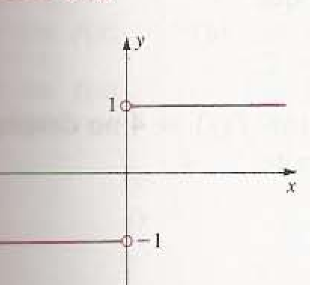
El croquis de la Figura 2.16 no pretende dar la impresión de que $f(x)$ no está definida para $x \geq a$, sino ilustrar que para $x \to a^-$ solamente deben tomarse en cuenta los valores de x que son *menores* que a. Análogamente, para $x \to a^+$ sólo deben tomarse en cuenta los valores de x que son *mayores* que a.

En el siguiente teorema se describe la relación entre los límites y los límites unilaterales.

TEOREMA (2.9) Sea a un punto contenido en un intervalo abierto y f una función definida en todo el intervalo, excepto posiblemente en a. Entonces $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.

Este teorema (que se puede demostrar usando la Definición (2.10) de la Sección 2.3) dice que *el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a existe si y sólo si los límites por la derecha y por la izquierda existen y son iguales.*

FIGURA 2.18



EJEMPLO 3 Sea $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Calcular $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Solución En la Figura 2.18 hay un croquis de la gráfica de f. Nótese que f no está definida en $x = 0$.

Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y $f(x) = x/x = 1$. Por lo tanto,

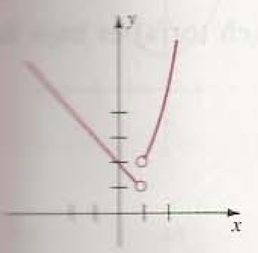
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$ y $f(x) = -x/x = -1$. Por tanto,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1.$$

Como los límites por la derecha y por la izquierda no son iguales, del Teorema (2.9) se deduce que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe. •

FIGURA 2.19



EJEMPLO 4 Sea f la función definida parte por parte como sigue

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{para } x < 1 \\ x^2 + 1 & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

Evaluar $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Solución En la Figura 2.19 aparece un croquis de la gráfica de f. Nótese que la gráfica no tiene ningún punto con abscisa 1. Claramente,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2 - x) = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2 + 1) = 2$$

Como los límites por la derecha y por la izquierda no son iguales, por el Teorema (2.9), $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe. •

EJEMPLO 5 Trazar la gráfica de la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{para } x < 1 \\ 4 & \text{para } x = 1 \\ x^2 + 1 & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

Determinar $\lim_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ y $\lim_{x \to 1} f(x)$.

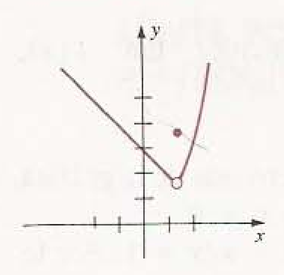
Solución La gráfica se tiene en la Figura 2.20. Vemos que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3 - x) = 2$$

y

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + 1) = 2$$

FIGURA 2.20



Como los límites por la derecha y por la izquierda son iguales, del Teorema (2.9) se deduce que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2.$$

Adviértase que el valor de la función $f(1) = 4$ no desempeña ningún papel al calcular el límite. •

La siguiente aplicación utiliza los límites unilaterales.

EJEMPLO 6 Un gas (como el vapor de agua o el oxígeno) se mantiene a temperatura constante dentro del cilindro mostrado en la Figura 2.21. Cuando el gas se comprime el volumen disminuye hasta que se llega a una presión crítica. Al rebasar esta presión el gas se convierte en un líquido. Utilizar la gráfica de la Figura 2.22 para interpretar y calcular

$$\lim_{P \to 100^-} V \quad \text{y} \quad \lim_{P \to 100^+} V$$

Solución En la Figura 2.22 vemos que cuando la presión P (en torrs) es baja la

FIGURA 2.21

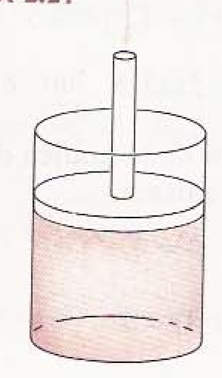
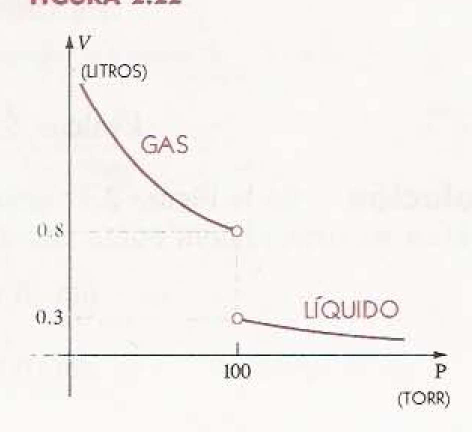


FIGURA 2.22



sustancia es gaseosa y el volumen V (en litros) es grande. (La definición de esta unidad de presión, el *torr* o milímetro de mercurio, puede encontrarse en libros de física.) Cuando P se acerca a 100 tomando valores menores que 100, V disminuye y tiende a 0.8, es decir,

$$\lim_{P \to 100^-} V = 0.8$$

Cuando P tiende a 100 tomando valores menores que 100 la sustancia es líquida y V aumenta muy lentamente (los líquidos son casi incompresibles) tendiendo a 0.3, es decir,

$$\lim_{P \to 100^+} V = 0.3$$

Cuando $P = 100$ las formas líquida y gaseosa coexisten en equilibrio y la sustancia no se puede clasificar como gas ni como líquido. •

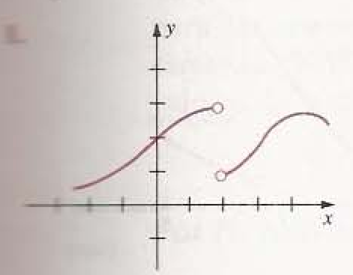
EJERCICIOS 2.2

Ejercicios 1-6: Consulte las gráficas para calcular los límites (a)-(f), si es que existen.

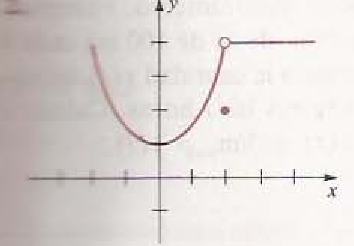
(a) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

(d) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (e) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ (f) $\lim_{x \to 0} f(x)$

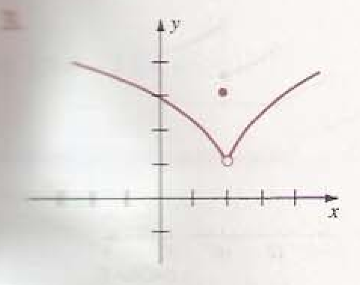
1.



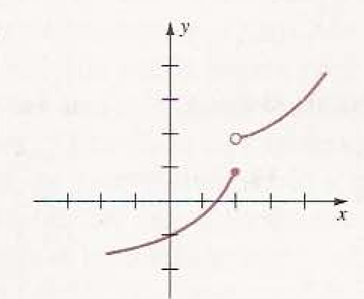
2.



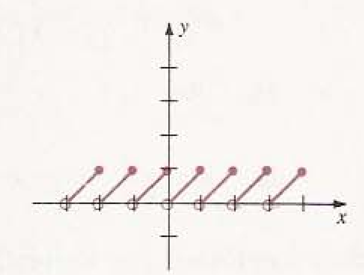
3.



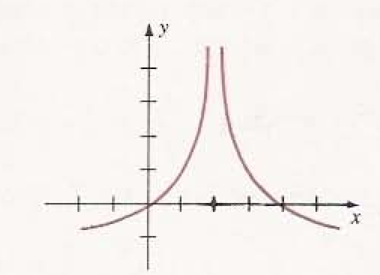
4.



5.



6.



Ejercicios 7-12: Trace la gráfica de la función f definida parte por parte y determine los límites (a)-(c) si es que existen.

(a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 1} f(x)$

7. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \le 1 \\ 3 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ 3 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} |x - 1| & \text{si } x \ne 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x - 1|}{x - 1} x^2 & \text{si } x \ne 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Ejercicios 13-18: Calcule el límite, si es que existe.

13. (a) $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{|x - 4|}{x - 4}$ (b) $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{|x - 4|}{x - 4}$ (c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{|x - 4|}{x - 4}$

14. (a) $\lim\limits_{x \to -5^+} \dfrac{x + 5}{|x + 5|}$ (b) $\lim\limits_{x \to -5^-} \dfrac{x + 5}{|x + 5|}$ (c) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x + 5}{|x + 5|}$

15. $\lim\limits_{x \to -6^+} (\sqrt{x + 6} + x)$ **16.** $\lim\limits_{x \to 5/2^-} (\sqrt{5 - 2x} - x^2)$

17. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^3}$ **18.** $\lim\limits_{x \to 8^-} \dfrac{1}{x - 8}$

Ejercicios 19-30: Utilice simplificaciones algebraicas como ayuda para evaluar el límite, si es que existe.

19. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

20. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^3 - 6x^2 + x - 3}{x - 3}$

21. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x}{2x^2 + 5x - 7}$

22. $\lim\limits_{r \to -3} \dfrac{r^2 + 2r - 3}{r^2 + 7r + 12}$

23. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3x^2 - 13x - 10}{2x^2 - 7x - 15}$

24. $\lim\limits_{x \to 25} \dfrac{\sqrt{x} - 5}{x - 25}$ **25.** $\lim\limits_{k \to 4} \dfrac{k^2 - 16}{\sqrt{k} - 2}$

26. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

27. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$ **28.** $\lim\limits_{h \to 2} \dfrac{h^3 - 8}{h^2 - 4}$

29. $\lim\limits_{h \to -2} \dfrac{h^3 + 8}{h + 2}$ **30.** $\lim\limits_{z \to 10} \dfrac{1}{z - 10}$

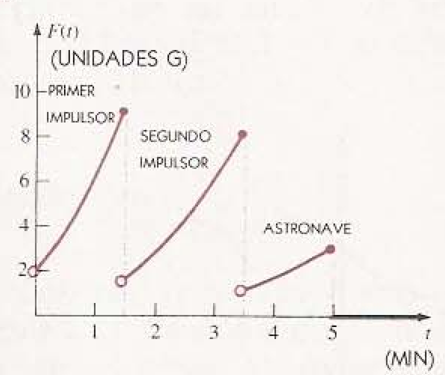
31. La figura muestra una gráfica típica de la fuerza de aceleración a la que se ven sometidos los astronautas durante el despegue de una nave espacial que tiene dos cohetes de impulso. (Una fuerza de 2G es igual al doble de la fuerza de la gravedad G; una de 3G es el triple de la gravedad, etcétera.) Sea $F(t)$ la fuerza en unidades G a los t minutos de vuelo. Calcule e interprete:

(a) $\lim\limits_{t \to 0^+} F(t)$

(b) $\lim\limits_{t \to 3.5^-} F(t)$ y $\lim\limits_{t \to 3.5^+} F(t)$

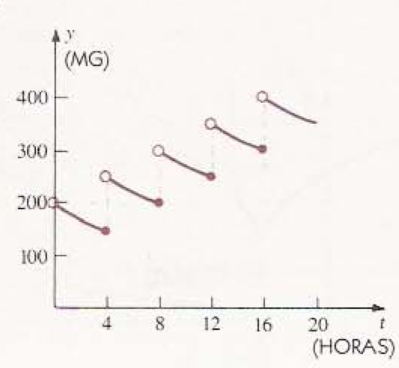
(c) $\lim\limits_{t \to 5^-} F(t)$ y $\lim\limits_{t \to 5^+} F(t)$

EJERCICIO 31



32. Un paciente recibe una dosis inicial de 200 mg (miligramos) de cierto medicamento. Posteriormente se le administran dosis de 100 mg cada 4 horas. La figura muestra la cantidad $y(t)$ del medicamento en la sangre a las t horas. Calcule e interprete $\lim_{t \to 8^-} y(t)$ y $\lim_{t \to 8^+} y(t)$.

EJERCICIO 32



Ejercicios 33-38: El resultado enunciado se puede comprobar con métodos que se exponen en capítulos posteriores. Use una calculadora para verificar el resultado sustituyendo x por varios números reales. Explique por qué no se puede *demostrar* la existencia del límite usando la calculadora.

33. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} \approx 2.72$

34. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 2x)^{3/x} \approx 403.4$

35. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3^x - 9}{x - 2} \approx 9.89$

36. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2^x - 2}{x - 1} \approx 1.39$

37. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{4^{|x|} + 9^{|x|}}{2}\right)^{1/|x|} = 6$

38. $\lim\limits_{x \to 0} |x|^x = 1$

2.3 DEFINICIÓN FORMAL DE LÍMITE

En la Sección 2.2 se definió informalmente $\lim_{x \to a} f(x) = L$ diciendo que $f(x)$ puede *acercarse arbitrariamente* a L escogiendo a x *suficientemente próximo a a* (con $x \neq a$). Esto es una buena descripción de límite, pero le falta precisión matemática debido a la vaguedad de las expresiones *acercarse arbitrariamente a* y *suficientemente cerca de.* En esta sección se dará una definición formal que puede usarse para formular demostraciones rigurosas de las propiedades de los límites y sus resultados.

La clave para llegar a una definición satisfactoria está en observar que se debe poder hacer a $|f(x) - L|$ tan *pequeño como se quiera* escogiendo x lo suficientemente cerca de a (con $x \neq a$), es decir, eligiendo a x tal que $|x - a|$ sea *suficientemente pequeño* (y $x - a \neq 0$). En cálculo es costumbre usar las letras griegas ε (épsilon) y δ (delta) para denotar números reales positivos muy pequeños. Decir que $|f(x) - L|$ puede hacerse tan pequeño como se quiera significa que *para todo* $\varepsilon > 0$, pueden encontrarse valores de x tales que

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Por (1.3) (i) esta igualdad es equivalente a

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \quad \text{o bien} \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

Análogamente, para expresar que $|x - a|$ es suficientemente pequeño (y que $x - a \neq 0$) puede usar la desigualdad

$$0 < |x - a| < \delta \qquad \text{para un } \delta > 0.$$

Usando de nuevo (1.3) (i) se ve que esto equivale a

$$a - \delta < x < a + \delta \qquad \text{y} \qquad x \neq a.$$

FIGURA 2.23

(i) $0 < |x - a| < \delta$

δ; $a - \delta$, x, a, $a + \delta$; l

(ii) $|f(x) - L| < \varepsilon$

ε; $L - \varepsilon$, $f(x)$, L, $L + \varepsilon$; l'

En la Figura 2.23 se tienen las gráficas de estas desigualdades sobre rectas coordenadas l y l', respectivamente. En ellas ε y δ deben considerarse números muy pequeños tales como 0.0001 o 0.0000001. El círculo pequeño en la Figura 2.23 (i) indica que $x \neq a$.

Esta notación se utiliza en la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE LÍMITE (2.10)

Sea a un punto de un intervalo abierto, sea f una función definida en todo el intervalo excepto posiblemente en a, y sea L un número real. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

A veces es conveniente usar otra forma de la Definición (2.10) en la que las desigualdades con valor absoluto se enuncian en términos de intervalos abiertos (véase la Figura 2.23).

DEFINICIÓN ALTERNA DE LÍMITE (2.11)

La expresión

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que siempre que x esté en el intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ y $x \neq a$, entonces $f(x)$ se encuentra localizada en el intervalo abierto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Si $f(x)$ *tiene límite cuando x tiende a a, entonces el límite es único*. En el Apéndice II se da una demostración de este importante teorema.

Para comprender mejor la relación entre los números positivos ε y δ en las Definiciones (2.10) y (2.11), utilizaremos interpretaciones geométricas parecidas a las de la Figura 1.37. El dominio de f se representa por algunos puntos sobre una recta coordenada l, y el contradominio por otros puntos sobre una recta coordenada l'. El proceso de límite se puede describir como sigue.

Para demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = L$:

Paso 1. Para todo $\varepsilon > 0$ se considera el intervalo abierto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ en el contradominio de f (véase la Figura 2.24).

Paso 2. Se demuestra que existe un intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ en el dominio de f para el que se satisface la Definición (2.11) (véase la Figura 2.25).

FIGURA 2.24

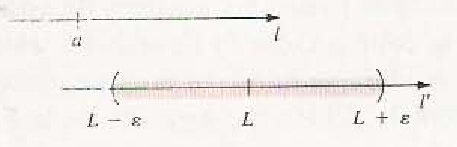
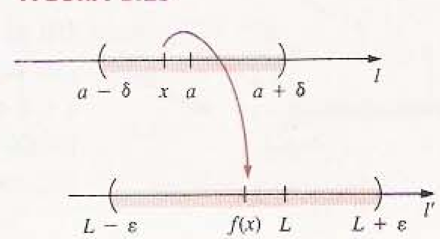


FIGURA 2.25



Es muy importante recordar que *primero* se considera el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ y *después* se demuestra que el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ con las características deseadas, existe en el dominio de f. Para recordar este orden de cosas es conveniente imaginar la función f como un cañón que dispara una bala desde el punto en l con coordenada x al punto en l' con coordenada $f(x)$, como se ilustra en la Figura 2.25 por medio de la flecha curva. El primer paso se puede considerar como el poner un blanco de radio ε con la diana en L. En el Paso 2 se debe encontrar un intervalo abierto que contenga a a punto en el que se debe emplazar el cañón de manera que la bala pegue en el blanco. Por cierto que no hay garantía de que acierte a la diana, pero si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se puede lograr que la bala haga impacto tan cerca del centro como se quiera.

El número δ en la definición de límite no es único, pues si algun valor específico δ la satisface, entonces cualquier número positivo δ' *menor* también la satisface.

En el siguiente ejemplo se verifica el valor de un límite utilizando la Definición (2.10).

EJEMPLO 1 Comprobar que $\lim_{x\to 4} \frac{1}{2}(3x - 1) = \frac{11}{2}$.

Solución Sean $f(x) = \frac{1}{2}(3x - 1)$, $a = 4$ y $L = \frac{11}{2}$. De acuerdo con la Definicón (2.10), debemos demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 4| < \delta, \quad \text{entonces} \quad \left|\tfrac{1}{2}(3x - 1) - \tfrac{11}{2}\right| < \varepsilon.$$

Para tener una idea de cómo elegir δ podemos estudiar la desigualdad en que interviene ε. La siguiente es una lista de desigualdades equivalentes:

$$\left|\tfrac{1}{2}(3x - 1) - \tfrac{11}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\tfrac{1}{2}\left|(3x - 1) - 11\right| < \varepsilon$$

$$|3x - 1 - 11| < 2\varepsilon$$

$$|3x - 12| < 2\varepsilon$$

$$3|x - 4| < 2\varepsilon$$

$$|x - 4| < \tfrac{2}{3}\varepsilon$$

La última de éstas da la pista que necesitamos. Tomando $\delta = \frac{2}{3}\varepsilon$, si $0 < |x - 4| < \delta$, entonces se satisface la última desigualdad de la lista y, como todas ellas son equivalentes, la primera también se satisface. Entonces, por la Definición (2.10), $\lim_{x\to 4} \frac{1}{2}(3x - 1) = \frac{11}{2}$. •

Fue relativamente fácil usar la definición de límite (2.10) en el Ejemplo 1 porque $f(x)$ era una expresión sencilla de x. Los límites de otras funciones más complicadas también se pueden verificar aplicando directamente la definición; sin embargo, la tarea de demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ adecuado, a veces requiere de mucho ingenio.

Se interpretarán ahora las Definiciones (2.10) y (2.11) usando la gráfica de f que se muestra en la Figura 2.26. Dado cualquier $\varepsilon > 0$ consideramos el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ sobre el eje y y las rectas horizontales $y = L \pm \varepsilon$. Si existe un intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ tal que para todo x en $(a - \delta, a + \delta)$, excepto posible-

mente para $x = a$, el punto $P(x, f(x))$ se encuentra entre las rectas horizontales —es decir, dentro del rectángulo sombreado que se tiene en la Figura 2.26— entonces

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

y por lo tanto $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

El siguiente ejemplo ilustra cómo se aplica a una función específica el procedimiento geométrico presentado en la Figura 2.26.

FIGURA 2.26

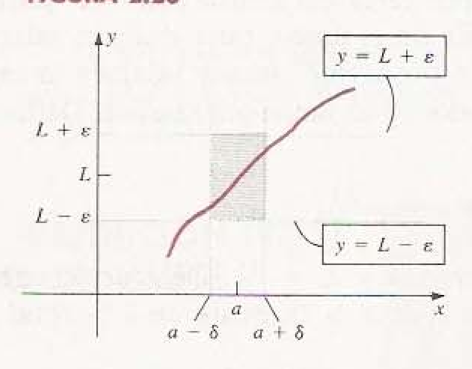
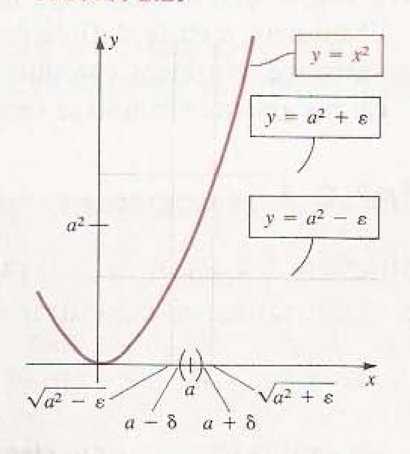


FIGURA 2.27



EJEMPLO 2 Demostrar que $\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$.

Solución Consideremos el caso $a > 0$. Se aplicará la Definición Alterna (2.11) con $f(x) = x^2$ y $L = a^2$. En la Figura 2.27 aparece un croquis de la gráfica de f junto con unos puntos sobre los ejes x y y que corresponden a a y a^2, respectivamente.

Para cualquier número positivo ε consideramos las rectas horizontales $y = a^2 - \varepsilon$ y $y = a^2 + \varepsilon$. Estas rectas cortan a la gráfica de f en puntos con abscisas $\sqrt{a^2 - \varepsilon}$ y $\sqrt{a^2 + \varepsilon}$, como se ve en la figura. Si x está en el intervalo abierto $(\sqrt{a^2 - \varepsilon}, \sqrt{a^2 + \varepsilon})$, entonces

$$\sqrt{a^2 - \varepsilon} < x < \sqrt{a^2 + \varepsilon}.$$

Por lo tanto, $$a^2 - \varepsilon < x^2 < a^2 + \varepsilon,$$

es decir, $f(x) = x^2$ está en el intervalo abierto $(a^2 - \varepsilon, a^2 + \varepsilon)$. Geométricamente, esto significa que el punto (x, x^2) sobre la gráfica de f se encuentra entre las dos rectas horizontales.

Escojamos un número δ menor que $\sqrt{a^2 + \varepsilon} - a$ y $a - \sqrt{a^2 - \varepsilon}$, como se ilustra en la Figura 2.27. Resulta que si x está en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, entonces x también está en $(\sqrt{a^2 - \varepsilon}, \sqrt{a^2 + \varepsilon})$ y, por lo tanto, $f(x)$ está en el intervalo $(a^2 - \varepsilon, a^2 + \varepsilon)$. Por la Definición (2.11), $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$. Aunque sólo hemos considerado $a > 0$, se ve que puede aplicarse un razonamiento análogo para $a \leq 0$. •

Los siguientes dos ejemplos, que se estudiaron también en la Sección 2.2, muestran cómo puede usarse la interpretación geométrica ilustrada en la Figura 2.27 para demostrar que algunos límites no existen.

EJEMPLO 3 Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ no existe.

Solución Procedamos de manera indirecta. Supóngase que existe un número L tal que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = L.$$

Consideremos cualquier par de rectas horizontales $y = L \pm \varepsilon$, como se ilustra en la Figura 2.28. Como estamos suponiendo que el límite existe, debería ser posible encontrar un intervalo abierto $(0 - \delta, 0 + \delta)$, o equivalentemente $(-\delta, \delta)$, que contuviese al 0, tal que si $-\delta < x < \delta$ y $x \neq 0$, el punto $(x, 1/x)$ de la gráfica estuviese entre las rectas horizontales. Sin embargo, como $1/x$ se puede hacer tan grande como se quiera escogiendo x cerca de 0, no todos los puntos $(x, 1/x)$ con abscisa diferente de cero en $(-\delta, \delta)$ tienen esta propiedad. Por tanto nuestra suposición es falsa, es decir, el límite no existe. •



FIGURA 2.28

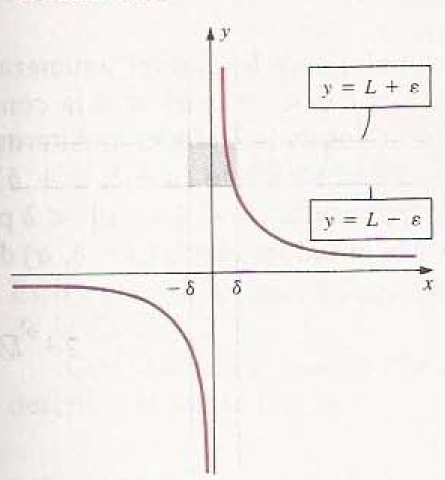
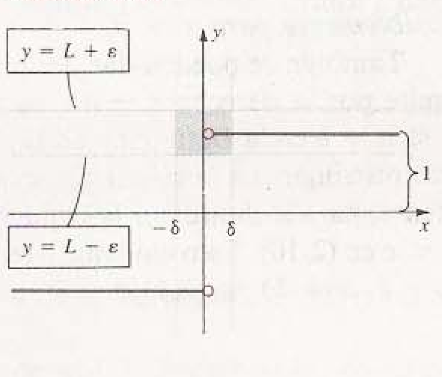


FIGURA 2.29



EJEMPLO 4 Sea $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe.

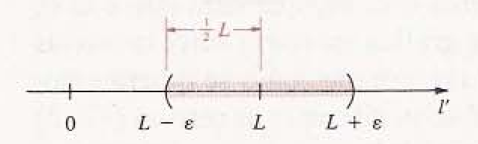
Solución Si $x > 0$, entonces $|x|/x = x/x = 1$ y, por lo tanto, la gráfica de f a la derecha del eje y coincide con la recta $y = 1$. Si $x < 0$, entonces $|x|/x = -x/x = -1$, lo que significa que a la izquierda del eje y la gráfica de f coincide con la recta $y = -1$. Si fuese cierto que $\lim_{x\to 0} f(x) = L$ para algún L, estas observaciones implicarían que $-1 \leq L \leq 1$. Si consideramos cualquier par de rectas horizontales $y = L \pm \varepsilon$, con $0 < \varepsilon < 1$, como se muestra en la Figura 2.29, entonces para *todo* intervalo $(-\delta, \delta)$ que contiene al 0, existen puntos de la gráfica con x diferente de cero en el intervalo, que no se encuentran entre estas dos rectas. De esto se deduce que el límite no existe. •

El siguiente teorema afirma que *si una función f tiene un límite positivo cuando x tiende a a, entonces $f(x)$ es positivo en todos los puntos de algún intervalo abierto que contenga a a, excepto posiblemente en a.*

TEOREMA (2.12) Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $L > 0$, existe entonces un intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ que contiene a a, tal que $f(x) > 0$ para todo x en $(a - \delta, a + \delta)$, excepto posiblemente $x = a$.

Demostración Considérese el punto en una recta coordenada que corresponde al número positivo L. Si se elige $\varepsilon = \frac{1}{2}L$, entonces el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ contiene solamente números positivos, como se ilustra en la Figura 2.30. Por la Definición (2.11), existe un $\delta > 0$ tal que si x está el intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ y $x \neq a$, entonces $f(x)$ está en $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ y, por lo tanto, $f(x) > 0$. • •

FIGURA 2.30



Se puede demostrar que *si f tiene un límite negativo cuando x tiende a a, entonces existe un intervalo abierto I que contiene a a tal que $f(x) < 0$ para todo x en I, excepto posiblemente para $x = a$.*

También se pueden dar definiciones formales para los límites unilaterales. Para el límite por la derecha $x \to a^+$, basta cambiar por $0 < |x - a| < \delta$ la condición $a < x < a + \delta$ en la Definición (2.10). En los términos de la Definición Alterna (2.11) hay que restringir x a la mitad *derecha* $(a, a + \delta)$ del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$. Análogamente, para el límite por la izquierda $x \to a^-$, se cambia $0 < |x - a| < \delta$ por $a - \delta < x < a$ en (2.10). Esto equivale a restringir x a la mitad *izquierda* $(a - \delta, a)$ del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ en (2.11).

EJERCICIOS 2.3

Ejercicios 1-12: Demuestre que el límite existe usando la Definición (2.10).

1. $\lim_{x\to 4} 3x = 12$
2. $\lim_{x\to 5} (-4x) = -20$
3. $\lim_{x\to 2} (5x - 3) = 7$
4. $\lim_{x\to -3} (2x + 1) = -5$
5. $\lim_{x\to -6} (10 - 9x) = 64$
6. $\lim_{x\to 4} (8x - 15) = 17$
7. $\lim_{x\to 3} 5 = 5$
8. $\lim_{x\to 5} 3 = 3$
9. $\lim_{x\to a} c = c$ para cualesquiera números reales a y c.
10. $\lim_{x\to 6} \left(9 - \frac{x}{6}\right) = 8$
11. $\lim_{x\to a} x = a$ para todo número real a.
12. $\lim_{x\to a} (mx + b) = ma + b$ para cualesquiera números reales m, b y a.

Ejercicios 13-18: Use el método gráfico ilustrado en el Ejemplo 2 para verificar el límite suponiendo que $a > 0$.

13. $\lim_{x\to -a} x^2 = a^2$
14. $\lim_{x\to a} (x^2 + 1) = a^2 + 1$
15. $\lim_{x\to a} x^3 = a^3$
16. $\lim_{x\to a} x^4 = a^4$
17. $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$
18. $\lim_{x\to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}$

Ejercicios 19-26: Use el método ilustrado en los Ejemplos 3 y 4 para demostrar que el límite no existe.

19. $\lim_{x\to 3} \frac{|x - 3|}{x - 3}$
20. $\lim_{x\to -2} \frac{x + 2}{|x + 2|}$
21. $\lim_{x\to -1} \frac{3x + 3}{|x + 1|}$
22. $\lim_{x\to 5} \frac{2x - 10}{|x - 5|}$
23. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$
24. $\lim_{x\to 4} \frac{7}{x - 4}$

25. $\lim_{x \to -5} \dfrac{1}{x+5}$

26. $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2}$

27. Dé un ejemplo de una función f definida en a tal que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe pero $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

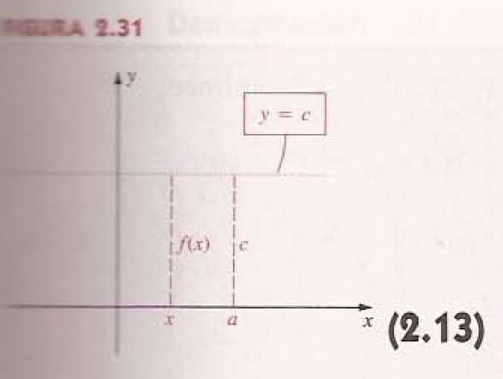
28. Demuestre que si f es la función mayor entero y a es un entero, entonces $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.

29. Sea f definida por las condiciones: $f(x) = 0$ si x es racional y $f(x) = 1$ si x es irracional. Demuestre que para todo número real a, $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.

30. ¿Por qué no se puede aplicar la Definición (2.10) para investigar $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$?

2.4 MÉTODOS PARA CALCULAR LÍMITES

FIGURA 2.31



Si f es una función constante, entonces existe un número real c tal que $f(x) = c$ para todo x. La gráfica de f es la recta horizontal $y = c$ que se ilustra en la Figura 2.31. Es evidente que $f(x)$ *tiende a* c, o que $f(x)$ se puede *acercar arbitrariamente* a c, puesto que $f(x)$ toma el valor c para todo x. Por lo tanto,

(2.13)
$$\lim_{x \to a} c = c$$

Esto es también una consecuencia directa de la Definición (2.10) (véase el Ejercicio 7 de la Sección 2.3).

Con frecuencia se dice que *el límite de una constante es la propia constante* para describir el límite (2.13).

EJEMPLO 1 Evaluar $\lim_{x \to 3} 8$, $\lim_{x \to 8} 3$ y $\lim_{x \to a} 0$.

Solución Aplicando (2.13),

$$\lim_{x \to 3} 8 = 8, \quad \lim_{x \to 8} 3 = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} 0 = 0 \quad \bullet$$

FIGURA 2.32

Consideremos ahora la función lineal f dada por $f(x) = x$ para todo x. La gráfica de f es la recta $y = x$ que se ilustra en la Figura 2.32. Como $f(x) = x$, es evidente que $f(x)$ tiende a a cuando x tiende a a. Usando la notación de límite:

(2.14)
$$\lim_{x \to a} x = a$$

Es fácil demostrar (2.14) usando la Definición (2.10).

EJEMPLO 2 Evaluar $\lim_{x \to \sqrt{2}} x$ y $\lim_{x \to -4} x$.

Solución Por (2.14),

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} x = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -4} x = -4 \quad \bullet$$

Más adelante se verá que las fórmulas (2.13) y (2.14) se pueden usar como base para calcular los límites de expresiones muy complicadas.

Muchas funciones pueden expresarse como sumas, diferencias, productos y cocientes de otras funciones. En particular, sea s la suma de dos funciones f y g, de manera que $s(x) = f(x) + g(x)$ para todo x en el dominio de s. Si $f(x)$ y $g(x)$ tienen límites L y M, respectivamente, cuando x tiende a a, es de esperarse que $s(x)$ tenga como límite $L + M$, cuando x tiende a a. El siguiente teorema afirma que éste y otros enunciados análogos para productos y cocientes son ciertos.

TEOREMA (2.15)

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

(i) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$

(ii) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

(iii) $\lim_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{L}{M}$, si $M \neq 0$

(iv) $\lim_{x \to a} [cf(x)] = cL$, para todo número real c

(v) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = L - M$

Aunque intuitivamente las conclusiones del Teorema (2.15) son evidentes, sus demostraciones son bastante técnicas. En el Apéndice II se pueden encontrar demostraciones para (i)-(iii) basadas en la Definición (2.10). La parte (iv) del teorema se deduce fácilmente de la parte (ii) y de (2.13), como sigue:

$$\lim_{x \to a} [cf(x)] = \left[\lim_{x \to a} c\right]\left[\lim_{x \to a} f(x)\right] = cL.$$

Finalmente, para demostrar (v) se escribe

$$f(x) - g(x) = f(x) + (-1)g(x)$$

y se utilizan (i) y (iv) con $c = -1$.

El Teorema (2.15) se escribe con frecuencia como sigue, siempre y cuando los límites de $f(x)$ y $g(x)$ existan.

(i) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

(ii) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

(iii) $\lim_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

(iv) $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c\left[\lim_{x \to a} f(x)\right]$

(v) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

Se usará el Teorema (2.15) para demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA (2.16) Si m, b y a son números reales arbitrarios, entonces

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$$

Demostración De (2.13) y (2.14) se sabe que

$$\lim_{x \to a} m = m, \quad \lim_{x \to a} x = a \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} b = b.$$

Entonces por (i) y (iv) del Teorema (2.15),

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (mx + b) &= \lim_{x \to a} (mx) + \lim_{x \to a} b \\ &= m\left(\lim_{x \to a} x\right) + b \\ &= ma + b. \end{aligned}$$

Este resultado también puede demostrarse directamente a partir de la Definición (2.10) (véase el Ejercicio 12 de la Sección 2.3). • •

Si f es una función lineal, entonces de acuerdo con el Teorema (2.16), $\lim_{x \to a} f(x)$ se puede calcular simplemente sustituyendo x por a. En la Sección 2.5 se estudiarán muchas otras funciones que tienen también esta propiedad.

EJEMPLO 3 Calcular $\lim_{x \to 2} \dfrac{3x + 4}{5x + 7}$.

Solución El numerador y el denominador del cociente son funciones lineales cuyos límites existen, de acuerdo con el Teorema (2.16). Además el límite del denominador no es 0. Entonces, por el Teorema (2.15) (iii) y el Teorema (2.16),

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x + 4}{5x + 7} = \frac{\lim_{x \to 2} (3x + 4)}{\lim_{x \to 2} (5x + 7)} = \frac{3(2) + 4}{5(2) + 7} = \frac{10}{17} \quad \bullet$$

El Teorema (2.15) se puede generalizar a límites de sumas, diferencias, productos y cocientes de más de dos funciones.

EJEMPLO 4 Demostrar que para todo número real a, $\lim_{x \to a} x^3 = a^3$.

Solución Como $\lim_{x\to a} x = a$,

$$\lim_{x\to a} x^3 = \lim_{x\to a} (x \cdot x \cdot x)$$
$$= \left(\lim_{x\to a} x\right) \cdot \left(\lim_{x\to a} x\right) \cdot \left(\lim_{x\to a} x\right)$$
$$= a \cdot a \cdot a = a^3$$

El método empleado en el Ejemplo 4 se puede aplicar a x^n para cualquier enter positivo n. Basta escribir x^n como un producto $x \cdot x \cdot \cdots \cdot x$ de n factores y lueg tomar el límite de cada factor. Esto da la parte (i) del siguiente teorema. La parte (ii puede demostrarse usando el Teorema (2.15) (ii).

TEOREMA (2.17) Sea n un entero positivo. Entonces

(i) $\lim_{x\to a} x^n = a^n$

(ii) $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$, siempre y cuando $\lim_{x\to a} f(x)$ exista.

EJEMPLO 5 Calcular $\lim_{x\to 2} (3x + 4)^5$.

Solución Aplicando (2.17) (ii) y el Teorema (2.16),

$$\lim_{x\to 2} (3x+4)^5 = \left[\lim_{x\to 2} (3x+4)\right]^5 = [3(2)+4]^5$$
$$= 10^5 = 100{,}000$$

EJEMPLO 6 Calcular $\lim_{x\to -2} (5x^3 + 3x^2 - 6)$.

Solución Procederemos como sigue (justifíquese el razonamiento):

$$\lim_{x\to -2} (5x^3 + 3x^2 - 6) = \lim_{x\to -2} (5x^3) + \lim_{x\to -2} (3x^2) - \lim_{x\to -2} (6)$$
$$= 5 \lim_{x\to -2} (x^3) + 3 \lim_{x\to -2} (x^2) - 6$$
$$= 5(-2)^3 + 3(-2)^2 - 6$$
$$= 5(-8) + 3(4) - 6 = -34$$

El límite en el Ejemplo 6 es el número que se obtiene al sustituir x por -2 en $5x^3$ + $3x^2 - 6$. El siguiente teorema afirma que esto mismo sucede para los límites de cu*quier* polinomio.

TEOREMA (2.18) Si f es un polinomio y a es un número real, entonce

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Demostración Se puede escribir $f(x)$ en la forma

$$f(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0$$

para algunos números reales b_n, b_{n-1}, ..., b_0. Como en el Ejemplo 6,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} (b_n x^n) + \lim_{x \to a} (b_{n-1} x^{n-1}) + \cdots + \lim_{x \to a} b_0 \\ &= b_n \lim_{x \to a} (x^n) + b_{n-1} \lim_{x \to a} (x^{n-1}) + \cdots + \lim_{x \to a} b_0 \\ &= b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \cdots + b_0 = f(a) \quad \bullet \bullet\end{aligned}$$

COROLARIO (2.19) Si q es una función racional y a está en el dominio de q, entonces

$$\lim_{x \to a} q(x) = q(a).$$

Demostración Puede escribirse $q(x) = f(x)/h(x)$, donde f y h son polinomios. Si a está en el dominio de q, entonces $h(a) \neq 0$. Usando el Teorema (2.15) (iii) y (2.18),

$$\lim_{x \to a} q(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} = \frac{f(a)}{h(a)} = q(a) \quad \bullet \bullet$$

EJEMPLO 7 Calcular $\lim_{x \to 3} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{4x^3 - 7}$.

Solución Aplicando el Corolario (2.19),

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3} \frac{5x^2 - 2x + 1}{4x^3 - 7} &= \frac{5(3)^2 - 2(3) + 1}{4(3)^3 - 7} \\ &= \frac{45 - 6 + 1}{108 - 7} = \frac{40}{101} \quad \bullet\end{aligned}$$

El siguiente teorema expresa que para las raíces enteras positivas de x el límite se puede obtener por sustitución. La demostración utiliza la definición formal de límite (2.10) y se puede ver en el Apéndice II.

TEOREMA (2.20) Si $a > 0$ y n es un entero positivo, o si $a \leq 0$ y n es un entero positivo impar, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

Si m y n son enteros positivos y $a > 0$, entonces usando el Teorema (2.17) (ii) y el Teorema (2.20),

$$\lim_{x \to a} (\sqrt[n]{x})^m = \left(\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

En términos de exponentes racionales,

$$\lim_{x \to a} x^{m/n} = a^{m/n}.$$

Esta fórmula puede ser generalizada al caso de exponentes negativos escribiendo $x^{-r} = 1/x^r$ y aplicando el Teorema (2.15) (iii).

EJEMPLO 8 Calcular $\lim_{x \to 8} \dfrac{x^{2/3} + 3\sqrt{x}}{4 - (16/x)}$.

Solución Procederemos como sigue (justifíquese el razonamiento):

$$\lim_{x \to 8} \frac{x^{2/3} + 3\sqrt{x}}{4 - (16/x)} = \frac{\lim_{x \to 8} (x^{2/3} + 3\sqrt{x})}{\lim_{x \to 8} [4 - (16/x)]}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 8} x^{2/3} + \lim_{x \to 8} 3\sqrt{x}}{\lim_{x \to 8} 4 - \lim_{x \to 8} (16/x)}$$

$$= \frac{8^{2/3} + 3\sqrt{8}}{4 - (16/8)}$$

$$= \frac{4 + 6\sqrt{2}}{4 - 2} = 2 + 3\sqrt{2} \; \bullet$$

TEOREMA (2.21)

Si una función f tiene un límite cuando x tiende a a, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

siempre y cuando n sea un entero positivo impar o bien n sea un entero positivo y $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.

El teorema anterior se demostrará en la Sección 2.5. Mientras tanto se usará sin demostrarlo para adquirir experiencia en la determinación de límites en los que intervengan raíces de expresiones algebraicas.

EJEMPLO 9 Calcular $\lim_{x \to 5} \sqrt[3]{3x^2 - 4x + 9}$.

Solución Usando los Teoremas (2.21) y (2.18),

$$\lim_{x \to 5} \sqrt[3]{3x^2 - 4x + 9} = \sqrt[3]{\lim_{x \to 5} (3x^2 - 4x + 9)}$$

$$= \sqrt[3]{75 - 20 + 9} = \sqrt[3]{64} = 4 \; \bullet$$

No hay que confundirse por los ejemplos anteriores: No siempre pueden calcularse los límites simplemente por sustitución. A veces es necesario usar otros medios. El siguiente teorema se refiere a tres funciones f, h y g, de las cuales $h(x)$ se encuentra siem-

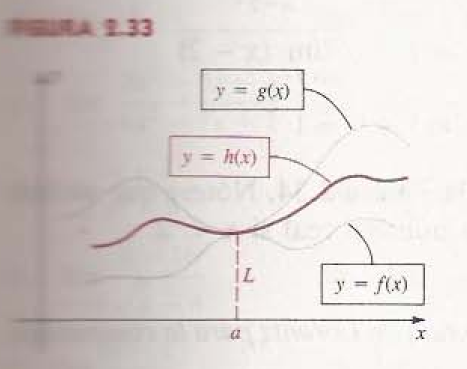
pre "intercalada" entre $f(x)$ y $g(x)$. Si f y g tienen el mismo límite L cuando x tiende a a, entonces h debe tener el mismo límite, como se enuncia a continuación.

TEOREMA DE LA INTERCALACIÓN (2.22)

Supóngase que para todo x en un intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente para $x = a$, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$, entonces $\lim_{x \to a} h(x) = L$.

FIGURA 2.33



En el Apéndice II puede encontrarse una demostración del Teorema de la Intercalación basada en la definición de límite. El resultado es intuitivamente cierto desde el punto de vista geométrico. En efecto, si $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, para todo x en un intervalo abierto que contiene a x, entonces la gráfica de h está interpuesta *entre* las gráficas de f y g en ese intervalo, como se ilustra en la Figura 2.33. Si f y g tienen el mismo límite L cuando x tiende a a, entonces evidentemente, h también tiene el límite L.

EJEMPLO 10 La función seno tiene la propiedad de que $-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$ para todo número real t. Usar este hecho y el Teorema de la Intercalación para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$

Solución Podemos escribir

$$-1 \leq \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq 1$$

para todo $x \neq 0$. Multiplicando por x^2 (que es un número positivo cuando $x \neq 0$), obtenemos

$$-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq x^2.$$

Como $$\lim_{x \to 0} (-x^2) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

se deduce del Teorema de la Intercalación (2.22), con $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2$, que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0 \;\bullet$$

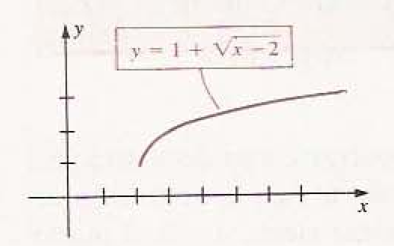
Para los límites unilaterales se pueden demostrar teoremas análogos a todos los teoremas sobre límites enunciados en esta sección. Por ejemplo,

$$\lim_{x \to a^+} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a^+} f(x) + \lim_{x \to a^+} g(x)$$

y $$\lim_{x\to a^+} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a^+} f(x)}$$

con las restricciones acostumbradas acerca de la existencia de los límites y las raíces n-ésimas. Existen también resultados análogos para los límites por la izquierda.

FIGURA 2.34



EJEMPLO 11 Determinar $\lim_{x\to 2^+} (1 + \sqrt{x-2})$.

Solución Aplicando teoremas sobre límites (unilaterales),

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+} (1 + \sqrt{x-2}) &= \lim_{x\to 2^+} 1 + \lim_{x\to 2^+} \sqrt{x-2} \\ &= 1 + \sqrt{\lim_{x\to 2^+} (x-2)} \\ &= 1 + 0 = 1\end{aligned}$$

La gráfica de $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ está trazada en la Figura 2.34. Nótese que no hay límite por la izquierda puesto que $\sqrt{x-2}$ no es un número real si $x < 2$. •

EJEMPLO 12 En la Teoría de la Relatividad, la *fórmula de Lorentz para la contracción*

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

da la relación entre la longitud L de un objeto que se mueve con velocidad v respecto de un observador, y la longitud L_0 en reposo, donde c es la velocidad de la luz. Esta fórmula indica que un objeto es más corto cuando se está moviendo que cuando se halla en reposo. Calcular e interpretar $\lim_{v\to c^-} L$ y explicar por qué se requiere un límite por la izquierda.

Solución Aplicando teoremas sobre límites (unilaterales),

$$\begin{aligned}\lim_{v\to c^-} L &= \lim_{v\to c^-} L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= L_0 \lim_{v\to c^-} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= L_0 \sqrt{\lim_{v\to c^-} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \\ &= L_0\sqrt{0} = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, si la velocidad de un objeto pudiera acercarse a la velocidad de la luz, entonces su longitud (dimensión en la dirección del movimiento), medida por un observador en reposo, tendería a cero. A veces se usa este resultado para justificar la teoría de que la velocidad de la luz (aproximadamente 3.0×10^8 m/s, o bien 186 000 mi/s) es la velocidad extrema del universo; es decir, ningún objeto puede llegar a tener una velocidad mayor que o igual a c.

El límite por la izquierda se necesita porque $\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ no es un número real si $v > c$. •

EJERCICIOS 2.4

Ejercicios 1-40: Calcule el límite, si es que existe.

1. $\lim_{x\to -2} (3x^3 - 2x + 7)$
2. $\lim_{x\to 4} (5x^2 - 9x - 8)$
3. $\lim_{x\to \sqrt{2}} (x^2 + 3)(x - 4)$
4. $\lim_{t\to -3} (3t + 4)(7t - 9)$
5. $\lim_{x\to 4} \sqrt[3]{x^2 - 5x - 4}$
6. $\lim_{x\to -2} \sqrt{x^4 - 4x + 1}$
7. $\lim_{x\to 7} 0$
8. $\lim_{x\to 1/2} \dfrac{4x^2 - 6x + 3}{16x^3 + 8x - 7}$
9. $\lim_{x\to \sqrt{2}} 15$
10. $\lim_{x\to 15} \sqrt{2}$
11. $\lim_{x\to 1/2} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{6x^2 - 7x + 2}$
12. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x + 3}{(1/x) + (1/3)}$
13. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x - 2}{x^3 - 8}$
14. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{(x - 2)^2}$
15. $\lim_{x\to 16} \dfrac{x - 16}{\sqrt{x} - 4}$
16. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^4 - 16}$
17. $\lim_{s\to 4} \dfrac{6s - 1}{2s - 9}$
18. $\lim_{x\to \pi} (x - 3.1416)$
19. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2}{x - 1} - \dfrac{1}{x - 1}\right)$
20. $\lim_{x\to 1} \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$
21. $\lim_{x\to 16} \dfrac{2\sqrt{x} + x^{3/2}}{\sqrt[4]{x} + 5}$
22. $\lim_{x\to -8} \dfrac{16x^{2/3}}{4 - x^{4/3}}$
23. $\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{\dfrac{2 + 5x - 3x^3}{x^2 - 1}}$
24. $\lim_{x\to \pi} \sqrt[5]{\dfrac{x - \pi}{x + \pi}}$
25. $\lim_{h\to 0} \dfrac{4 - \sqrt{16 + h}}{h}$
26. $\lim_{h\to 0} \left(\dfrac{1}{h}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 + h}} - 1\right)$
27. $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x - 1)^5}{x^5 - 1}$
28. $\lim_{x\to 6} (x + 4)^3(x - 6)^2$
29. $\lim_{v\to 3} v^2(3v - 4)(9 - v^3)$
30. $\lim_{k\to 2} \sqrt{3k^2 + 4}\,\sqrt[3]{3k + 2}$
31. (a) $\lim_{x\to 5^-} \sqrt{5 - x}$ (b) $\lim_{x\to 5^+} \sqrt{5 - x}$ (c) $\lim_{x\to 5} \sqrt{5 - x}$
32. (a) $\lim_{x\to 2^-} \sqrt{8 - x^3}$ (b) $\lim_{x\to 2^+} \sqrt{8 - x^3}$ (c) $\lim_{x\to 2} \sqrt{8 - x^3}$
33. (a) $\lim_{x\to 1^-} \sqrt[3]{x^3 - 1}$ (b) $\lim_{x\to 1^+} \sqrt[3]{x^3 - 1}$ (c) $\lim_{x\to 1} \sqrt[3]{x^3 - 1}$
34. (a) $\lim_{x\to -8^+} x^{2/3}$ (b) $\lim_{x\to -8^-} x^{2/3}$ (c) $\lim_{x\to -8} x^{2/3}$
35. $\lim_{x\to 5^+} (\sqrt{x^2 - 25} + 3)$
36. $\lim_{x\to 3^-} x\sqrt{9 - x^2}$
37. $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{(x - 3)^2}}{x - 3}$
38. $\lim_{x\to -10^-} \dfrac{x + 10}{\sqrt{(x + 10)^2}}$
39. $\lim_{x\to 5^+} \dfrac{1 + \sqrt{2x - 10}}{x + 3}$
40. $\lim_{x\to 4^+} \dfrac{\sqrt[4]{x^2 - 16}}{x + 4}$

Ejercicios 41-43: n denota un entero arbitrario. Para cada función f lleve a cabo el trazo de la gráfica de f y calcule $\lim_{x\to n^-} f(x)$ y $\lim_{x\to n^+} f(x)$.

41. $f(x) = (-1)^n$ si $n \le x < n + 1$
42. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = n \\ 1 & \text{si } x \neq n \end{cases}$
43. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x = n \\ 0 & \text{si } x \neq n \end{cases}$

Ejercicios 44-45: $[\![\ ]\!]$ denota la función mayor entero y n es un entero arbitrario.

44. Determine $\lim_{x\to n^-} [\![x]\!]$ y $\lim_{x\to n^+} [\![x]\!]$.
45. Sea $f(x) = x - [\![x]\!]$. Calcule $\lim_{x\to n^-} f(x)$ y $\lim_{x\to n^+} f(x)$.
46. Ponga de manifiesto que si $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to a} [f(x)/g(x)]$ no existe. (*Sugerencia:* Supóngase que hay un número M tal que $\lim_{x\to a} [f(x)/g(x)] = M$ y considérese que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \left[g(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)} \right]$$

47. Use el Teorema de la Intercalación y el hecho de que $\lim_{x\to 0} (|x| + 1) = 1$ para demostrar que $\lim_{x\to 0} (x^2 + 1) = 1$.
48. Use el Teorema de la Intercalación con $f(x) = 0$ y $g(x) = |x|$ para demostrar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 7}} = 0$$

49. Demuestre que si c es un número real no negativo y $0 \le f(x) \le c$ para todo x, entonces $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$.
50. Demuestre que $\lim_{x\to 0} x^4 \operatorname{sen} (1/\sqrt[3]{x}) = 0$. (*Sugerencia:* Véase el Ejemplo 10.)
51. La ley de Charles para los gases afirma que si la presión permanece constante entonces la relación entre el volumen V que un gas ocupa y su temperatura T (en grados C) está dada por $V =$

$V_0(1 + \frac{1}{273}T)$. La temperatura $T = -273$ °C es *el cero absoluto*.

(a) Calcule $\lim_{T\to -273^+} V$.

(b) ¿Por qué se necesita un límite por la derecha?

52. Según la Teoría de la Relatividad, la longitud de un objeto depende de su velocidad v (véase el Ejemplo 12). Einstein demostró también que la masa m de un objeto depende de v según la fórmula $m = m_0/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$, donde m_0 es la masa del objeto en reposo. Investigue $\lim_{v\to c^-} m$ y utilice su resultado para justificar que c es la velocidad máxima en el universo.

53. Una lente convexa tiene una distancia focal f en centímetros. Si un objeto se coloca a p centímetros de la lente, la distancia q de la imagen a la lente está relacionada con p y f por la *ecuación de las lentes* $(1/p) + (1/q) = 1/f$. Como se muestra en la figura, p debe ser mayor que f para que los rayos converjan.

(a) Analice $\lim_{p\to f^+} q$.

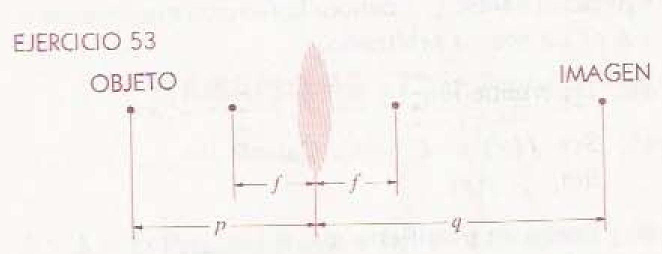
(b) ¿Qué sucede a la imagen cuando $p \to f^+$?

54. Consulte el Ejercicio 53. En la figura del Ejercicio 54 se muestra una lupa formada por una lente convexa. El objeto que será amplificado se coloca de manera que su distancia p a la lente sea menor que la distancia focal f. La amplificación lineal M es la razón del tamaño (altura) de la imagen al tamaño del objeto. Usando triángulos semejantes, $M = q/p$, donde q es la distancia de la imagen a la lente.

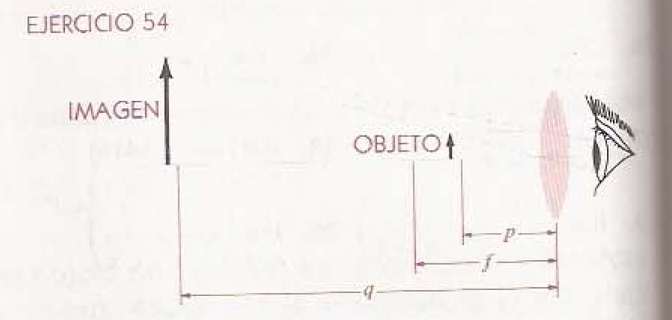
(a) Calcule $\lim_{p\to 0^+} M$. ¿Por qué se necesita un límite por la derecha?

(b) Investigue $\lim_{p\to f^-} M$. Explique lo que sucede al tamaño de la imagen.

EJERCICIO 53



EJERCICIO 54



2.5 FUNCIONES CONTINUAS

En la definición de $\lim_{x\to a} f(x)$ se hizo énfasis en la restricción $x \neq a$. En varios ejemplos de la sección anterior se vio que $\lim_{x\to a} f(x)$ puede existir aunque f no esté definida en a. Ahora se prestará atención a los casos en que a se halla en el dominio de f. Si f está definida en a y $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, entonces este límite puede o no ser igual a $f(a)$. Si $\lim_{x\to a} f(x) f(a)$ entonces f es *continua* en a, de acuerdo con la siguiente definición.

DEFINICIÓN (2.23)

Una función f es **continua** en un número a si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

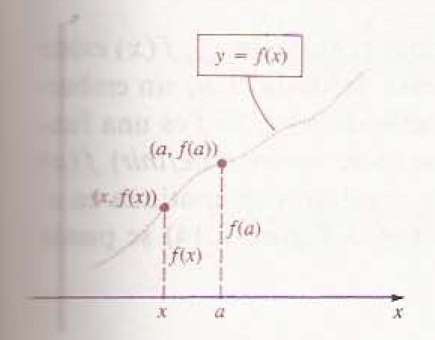
(i) f está definida en un intervalo abierto que contiene a a.

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

(iii) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si f no es continua en a entonces se dice que es **discontinua** en a o que tiene una **discontinuidad** en a. Si f es continua en a, entonces por la Definición (2.23) (i), hay un punto $(a, f(a))$ en la gráfica de f. Además, como $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, a medida

FIGURA 2.35



que x se acerca a a, $f(x)$ se acerca a $f(a)$, o bien, en términos geométricos, el punto $(x, f(x))$ de la gráfica de f, se acerca al punto $(a, f(a))$ (véase la Figura 2.35).

A veces es conveniente pensar que las funciones que son continuas en todos los números de un intervalo son aquellas cuyas gráficas pueden trazarse sin levantar el lápiz del papel; es decir, que las gráficas no tienen interrupciones. Otra interpretación de una función continua es que un cambio pequeño en x produce solamente un cambio pequeño en el valor de la función $f(x)$. Estas descripciones no son completamente rigurosas pero contribuyen a desarrollar una idea intuitiva de las funciones continuas.

EJEMPLO 1

(a) Demostrar que un polinomio es una función continua en todo número real a.

(b) Demostrar que una función racional es continua en todos los números reales de su dominio.

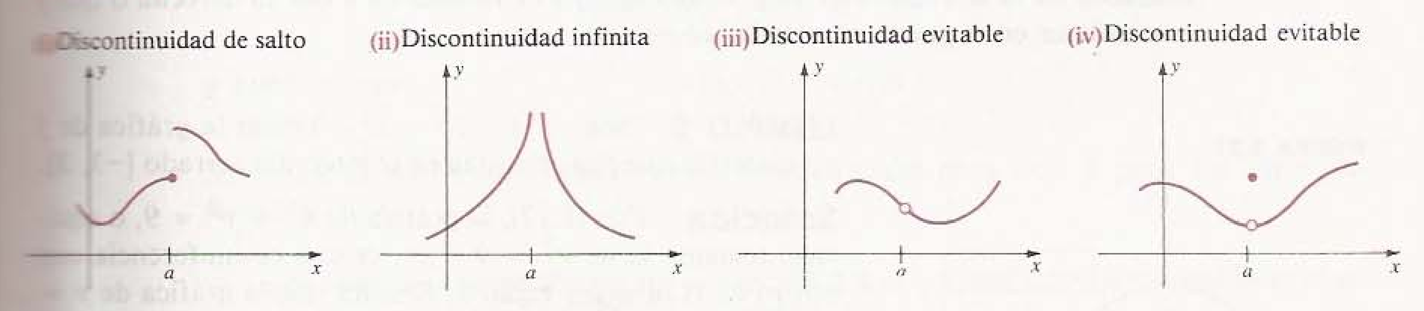
Solución

(a) Un polinomio f está definido en todo $\mathbb{R}$. Por el Teorema (2.18), $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ para todo número real a. Entonces f satisface las condiciones (i)-(iii) de la Definición (2.23) y, por lo tanto, es una función continua en a.

(b) Si q es una función racional, entonces $q = f/h$, donde f y h son polinomios. Por lo tanto q está definida en todos los números reales *excepto* en los ceros de h. Resulta que si $h(a) \neq 0$, entonces q está definida en un intervalo abierto que contiene a a. Además, por (2.19), $\lim_{x\to a} q(x) = q(a)$. Aplicando la Definición (2.23) se deduce que q es continua en a. •

En la Figura 2.36 aparecen las gráficas de varias funciones que *no* son continuas en el número real a y se indican los nombres que se dan a tales discontinuidades.

FIGURA 2.36



En el caso de la discontinuidad de salto (i), los límites por la derecha y por la izquierda cuando x tiende a a existen, pero son distintos y por lo tanto, $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe, como se requiere en (ii) de la Definición (2.23).

Para la discontinuidad infinita (ii), no se satisface *ninguna* de las tres condiciones

de la Definición (2.23). En la Sección 4.6 se estudiarán con mayor profundidad las discontinuidades infinitas.

Las discontinuidades evitables en (iii) y (iv) son parecidas porque $\lim_{x\to a} f(x)$ existe en ambos casos. En (iii) $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, pues f no está definida en a; sin embargo, en (iv) $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, a pesar de que f *sí* está definida en a. Si f es una función que tiene una discontinuidad evitable en a y se *define* (o se *vuelve a definir*) $f(a)$ como el número $\lim_{x\to a} f(x)$, entonces la (nueva) función resultante *es* continua en a. Para ilustrar esto, en el Ejemplo 1 de la Sección 2.2 (véase la Figura 2.14) se puede *definir* la función f de manera que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} & \text{si } x \neq 9 \\ 6 & \text{si } x = 9 \end{cases}$$

y entonces la función resultante f es continua en $a = 9$. Con esto se logra "evitar" la discontinuidad de la función original en $a = 9$.

Las funciones cuyas gráficas se tienen en la Figura 2.36 parecen ser continuas en los números distintos de a. La mayoría de las funciones que se usan en cálculo son de este tipo; es decir, pueden ser discontinuas en algunos números de sus dominios, pero continuas en el resto del dominio.

Si una función f es continua en todos los números de un intervalo abierto (a, b) se dice que **f es continua en el intervalo (a, b)**. Análogamente, una función es continua en un intervalo infinito de la forma (a, ∞) o bien $(-\infty, b)$, si es continua en todos los números del intervalo. La siguiente definición abarca el caso de un intervalo cerrado.

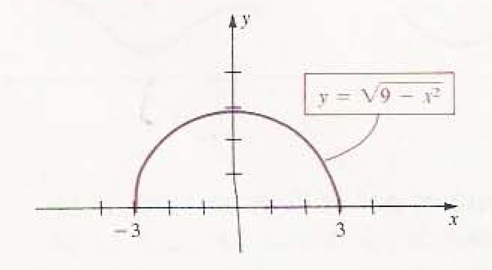
DEFINICIÓN (2.24)

Sea f una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. La **función f es continua en $[a, b]$** si lo es en (a, b) y además

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

Si una función f tiene un límite por la derecha o por la izquierda como los que aparecen en la Definición (2.24), se dice que **f es continua en a por la derecha** o que **f es continua en b por la izquierda**, respectivamente.

FIGURA 2.37



EJEMPLO 2 Sea $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$. Trazar la gráfica de f y demostrar que f es continua en el intervalo cerrado $[-3, 3]$.

Solución Por (1.12), la gráfica de $x^2 + y^2 = 9$, o equivalentemente la de $y^2 = 9 - x^2$, es una circunferencia con centro en el origen y radio 3. Resulta que la gráfica de $y = \sqrt{9 - x^2}$ y, por lo tanto la gráfica de f, es la mitad superior de esa circunferencia (véase la Figura 2.37).

Si $-3 < c < 3$ entonces, usando el Teorema (2.21),

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - c^2} = f(c).$$

Así, por la Definición (2.23), f es continua en c.

Según la Definición (2.24), sólo falta analizar los límites unilaterales en los extremos del intervalo. Como

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9} = 0 = f(-3),$$

f es continua por la derecha en -3. Y como también

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9} = 0 = f(3)$$

f es continua por la izquierda en 3. Esto completa la demostración de que f es continua en $[-3, 3]$. •

Definir la continuidad en otros tipos de intervalos no ofrece ninguna dificultad. Por ejemplo, una función f es continua en $[a, b)$ o bien $[a, \infty)$ si lo es en todos los números del intervalo mayores que a y si, además, f es continua por la derecha en a. Para que una función sea continua en intervalos de la forma $(a, b]$ o bien $(-\infty, b]$ se requiere que sea continua en todos los números del intervalo menores que b y que también sea continua por la izquierda en b.

Cuando se requiera estudiar la continuidad de una función f es conveniente obtener los intervalos más grandes en los que f sea continua, como se ilustra en el ejemplo siguiente. Por supuesto, f también es continua en cualquier subintervalo de esos intervalos.

EJEMPLO 3 Discutir la continuidad de f si $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-4}$.

Solución La función no está definida cuando el denominador $x - 4$ es cero (es decir, para $x = 4$), o cuando el radicando $x^2 - 9$ es negativo (es decir, si $-3 < x < 3$). Cualquier otro número real está en uno de los intervalos $(-\infty, -3]$, $[3, 4)$, o bien $(4, \infty)$. La demostración de que f es continua en cada uno de estos intervalos es parecida a la que se dio en la solución del Ejemplo 23. Por ejemplo, para demostrar la continuidad en $[3, 4)$ hay que demostrar que

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) \quad \text{si } 3 < c < 4$$

y también que

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3).$$

Se dejan al lector los detalles de la demostración para éste y para los otros intervalos. •

Los teoremas sobre límites de la Sección 2.4 se pueden usar para establecer el siguiente teorema.

TEOREMA (2.25) Si las funciones f y g son continuas en a, entonces también lo son la suma $f + g$, la diferencia $f - g$, el producto fg y, si $g(a) \neq 0$, el cociente f/g.

Demostración Si f y g son ambas continuas en a, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$. Por la definición de suma de funciones, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f+g)(x) &= \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]\\ &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\\ &= f(a)+g(a)\\ &= (f+g)(a)\end{aligned}$$

Esto demuestra que $f+g$ es continua en a. El resto del teorema se demuestra de manera parecida. • •

Si f y g son continuas en un intervalo I entonces $f+g$, $f-g$ y fg son continuas en I. Si además $g(a) \neq 0$ para todo a en I, entonces f/g es continua en I. Estos resultados se pueden generalizar a más de dos funciones; es decir, las sumas, diferencias, productos o cocientes que involucran cualquier número de funciones continuas son continuas (siempre y cuando no se anulen los denominadores).

En el Apéndice II se da una demostración del siguiente resultado sobre límites de funciones compuestas.

TEOREMA (2.26) Si f y g son funciones tales que $\lim_{x\to a} g(x) = b$, y si f es continua en b, entonces

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

El Teorema (2.26) se usa principalmente para demostrar otros teoremas. Por ejemplo, si n es un entero positivo y $f(x) = \sqrt[n]{x}$, entonces

$$f(g(x)) = \sqrt[n]{g(x)}$$

y

$$f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Aplicando ahora el hecho de que

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right),$$

se obtiene el resultado enunciado en el Teorema (2.21); es decir,

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} g(x)},$$

siempre y cuando exista la raíz n-ésima indicada.

Del Teorema (2.26) se deduce directamente el siguiente resultado.

TEOREMA (2.27)

Si g es continua en a y f es continua en $b = g(a)$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(g(a)).$$

Este teorema afirma que la composición de las funciones f y g es continua en a. Este resultado puede generalizarse al caso de funciones continuas en intervalos. A veces se enuncia como sigue: *La composición de funciones continuas es continua.*

EJEMPLO 4 Sea $f(x) = |x|$. Probar que f es continua en todo número real a.

Solución Como $|x| = \sqrt{x^2}$, por (2.21) y (2.17) tenemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} |x| = \lim_{x \to a} \sqrt{x^2}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \to a} x^2} = \sqrt{a^2} = |a| = f(a).$$

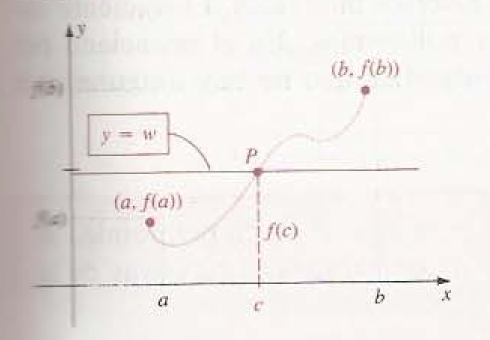
De la Definición (2.23) concluimos que f es continua en a. •

En textos más avanzados de cálculo se puede encontrar una demostración de la siguiente propiedad de las funciones continuas.

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO (2.28)

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, y w es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número c en $[a, b]$ tal que $f(c) = w$.


FIGURA 2.38



El Teorema (2.28) afirma que *cuando x varía de a a b, la función continua f toma todos los valores entre f(a) y f(b)*. Si se considera la gráfica de la función continua f como una curva que va del punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ sin interrupciones, como se ilustra en la Figura 2.38, se ve que para cualquier número w entre $f(a)$ y $f(b)$ la recta horizontal con ordenada w debe cortar a la gráfica al menos en un punto P. La abscisa c de P es un número tal que $f(c) = w$.

EJEMPLO 5 Verificar el Teorema del Valor Intermedio (2.28) para $f(x) = \sqrt{x+1}$ en el intervalo $[3, 24]$.

Solución La función f es continua en $[3, 24]$. Como $f(3) = 2$ y $f(24) = 5$, si w es cualquier número real entre 2 y 5, debe encontrarse un número c en el intervalo $[3, 24]$ tal que $f(c) = w$, es decir, $\sqrt{c+1} = w$. Elevando al cuadrado ambos lados

de la ecuación y despejando c obtenemos $c = w^2 - 1$. Este número c está en el intervalo $[3, 24]$, pues si $2 < w < 5$, entonces

$$4 < w^2 < 25, \quad \text{o bien} \quad 3 < w^2 - 1 < 24.$$

Para verificar nuestro resultado escribimos

$$f(c) = f(w^2 - 1) = \sqrt{(w^2 - 1) + 1} = w \quad \bullet$$

Como corolario del Teorema (2.28) se obtiene que *si* $f(a)$ *y* $f(b)$ *tienen signos contrarios, entonces existe un número c entre a y b tal que* $f(c) = 0$; *es decir, f tiene un cero en c*. Geométricamente esto significa que si el punto $(a, f(a))$ de la gráfica de una función continua se encuentra abajo del eje x y el punto $(b, f(b))$ se encuentra arriba del eje x, o viceversa, entonces la gráfica cruza el eje x en algún punto $(c, 0)$ tal que $a < c < b$.

La siguiente es una consecuencia útil del Teorema del Valor Intermedio. El intervalo al que se hace referencia puede ser abierto, cerrado, semiabierto (o abierto de un lado) o infinito.

TEOREMA (2.29) Si una función f es continua en un intervalo y no tiene ceros en él, entonces $f(x) > 0$ o bien $f(x) < 0$ para todo x en el intervalo.

Demostración La tesis del teorema establece que, según la hipótesis dada, $f(x)$ tiene el mismo signo en todo el intervalo. Si la conclusión fuera *falsa* existirían números x_1 y x_2 en el intervalo tales que $f(x_1) > 0$ y $f(x_2) < 0$. Por lo que se dijo anteriormente, esto implicaría que $f(c) = 0$ para algún número c entre x_1 y x_2, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, la tesis es verdadera. • •

En el Capítulo 4 se aplicará el Teorema (2.29) a la derivada de una función f como ayuda para conocer el modo en que $f(x)$ varía en diversos intervalos. El siguiente corolario es un caso especial muy útil para estudiar polinomios. En el enunciado del corolario, la expresión *soluciones sucesivas* c y d significa que no hay ninguna otra solución entre c y d.

COROLARIO (2.30) Sea $P(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ un polinomio. Si los números reales c y d son soluciones sucesivas de la ecuación

$$a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 = 0,$$

entonces los valores de $P(x)$ para x en el intervalo abierto (c, d) son todos positivos, o bien, todos negativos.

El corolario implica que si se elige cualquier número k tal que $c < k < d$, y si el valor $P(k)$ del polinomio es positivo, entonces $P(x)$ es positivo para *todo* x en (c, d).

Si $P(k)$ es negativo, entonces $P(x)$ es negativo en todo el intervalo (c, d). A $P(k)$ se le denomina un **valor de prueba** para el intervalo (c, d). También pueden emplearse valores de prueba para intervalos infinitos de la forma $(-\infty, a)$ o bien (a, ∞), si la ecuación $P(x) = 0$ no tiene soluciones en ellos. En el siguiente ejemplo se muestra cómo se utilizan los valores de prueba.

EJEMPLO 6 El polinomio de Legendre de tercer grado $P(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ aparece en la solución de los problemas de transmisión (o transferencia) de calor en física y en ingeniería. Encontrar dónde $P(x) > 0$ y dónde $P(x) < 0$.

Solución Comenzamos por calcular las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$. Escribiendo

$$P(x) = \tfrac{1}{2}x(5x^2 - 3) = 0,$$

obtenemos $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3/5} + \pm\sqrt{15/5} \approx 0.77$. Por lo tanto, las soluciones sucesivas de $P(x) = 0$ son $-\sqrt{15}/5$, 0 y $\sqrt{15}/5$, en orden creciente. Estas soluciones determinan los cuatro intervalos siguientes que no contienen soluciones $P(x) = 0$:

$$(-\infty, -\sqrt{15}/5), \qquad (-\sqrt{15}/5, 0), \qquad (0, \sqrt{15}/5), \qquad (\sqrt{15}/5, \infty)$$

Escogemos luego un número k en cada uno de estos intervalos y aplicamos el Corolario (2.30). Eligiendo el número -1 en $(-\infty, -\sqrt{15}/5)$, resulta el valor de prueba

$$P(-1) = \tfrac{1}{2}(-1)[5(-1)^2 - 3] = -1.$$

Como $P(-1) = -1 < 0$, del corolario se deduce que $P(x) < 0$ para todo x en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{15}/5)$.

Escogiendo $-\frac{1}{2}$ en el intervalo $(-\sqrt{15}/5, 0)$, obtenemos el valor de prueba

$$P(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2})[5(\tfrac{1}{4}) - 3] = \tfrac{7}{16} > 0$$

y por tanto, $P(x) > 0$ para todo x en $(-\sqrt{15}/5, 0)$.

Los intervalos restantes se estudian de la misma manera. Es conveniente ordenar el resultado de este trabajo en una tabla como sigue (verifíquense todos los valores):

Intervalo	$(-\infty, -\sqrt{15}/5)$	$(-\sqrt{15}/5, 0)$	$(0, \sqrt{15}/5)$	$(\sqrt{15}/5), \infty)$
k	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
Valor de prueba $P(k)$	-1	$\frac{7}{16}$	$-\frac{7}{16}$	1
Signo de $P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

En consecuencia, $P(x) > 0$ en los intervalos $(-\sqrt{15}/5, 0)$ y $(\sqrt{15}/5, \infty)$ y $P(x) < 0$ en los intervalos $(-\infty, -\sqrt{15}/5)$ y $(0, \sqrt{15}/5)$. •

EJERCICIOS 2.5

Ejercicios 1-6: Demuestre que la función f es continua en el número a dado.

1. $f(x) = \sqrt{2x - 5} + 3x$, $a = 4$

2. $f(x) = 3x^2 + 7 - \dfrac{1}{\sqrt{-x}}$, $a = -2$

3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$, $a = 3$

4. $f(x) = 1/x$, $a = 10^{-6}$

5. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2}$, $a = -5$

6. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{2x + 1}$, $a = 8$

Ejercicios 7-10: Demuestre que f es continua en el intervalo indicado.

7. $f(x) = \sqrt{x - 4}$; $[4, 8]$

8. $f(x) = \sqrt{16 - x}$; $(-\infty, 16]$

9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $(0, \infty)$

10. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$; $(1, 3)$

Ejercicios 11-22: Encuentre todos los números en los que la función f es continua.

11. $f(x) = \dfrac{3x - 5}{2x^2 - x - 3}$

12. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

13. $f(x) = \sqrt{2x - 3} + x^2$

14. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x - 4}}$

15. $f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

16. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

17. $f(x) = \dfrac{|x + 9|}{x + 9}$

18. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

19. $f(x) = \dfrac{5}{x^3 - x^2}$

20 $f(x) = \dfrac{4x - 7}{(x + 3)(x^2 + 2x - 8)}$

21. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}\sqrt{25 - x^2}}{x - 4}$

22. $f(x) = \dfrac{\sqrt{9 - x}}{\sqrt{x - 6}}$

23-28. Describa las discontinuidades de las funciones definidas en los Ejercicios 7-12 de la Sección 2.2.

29. Sea $f(x) = \begin{cases} cx^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ cx + 2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$

Encuentre un valor de c para el cual f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

30. Sea $f(x) = \begin{cases} c^2x & \text{si } x < 1 \\ 3cx - 2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

Determine todos los valores de c para los que f es continua en $\mathbb{R}$.

31. Sea $f(x) = \begin{cases} c & \text{si } x = -3 \\ \dfrac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} & \text{si } |x| < 3 \\ d & \text{si } x = 3. \end{cases}$

Encuentre valores de c y d para los que f sea continua en $[-3, 3]$.

32. Sea $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x \leq -1 \\ cx + d & \text{si } -1 < x < 2 \\ -5x & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

Obtenga valores de c y d para los que f sea continua en $\mathbb{R}$.

33. Sean

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x \leq 0 \\ |x - 4| & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Determine si las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ son continuas en 0.

34. Sea $f(x) = (x - [\![x]\!])^2$, donde $[\![\ ]\!]$ denota la función mayor entero. Sea n un entero arbitrario. Demuestre (a) que f es continua en el intervalo $[n, n + 1)$, y (b) que f no es continua en $[n, n + 1]$. Trace la gráfica de f.

35. Demuestre que si $f(x) = 1/x$ entonces f es continua en cualquier intervalo abierto que no contenga al origen. ¿Qué se puede decir de los intervalos abiertos que contienen al origen?

Ejercicios 36-37: ¿Es continua f en 3? Justifique su respuesta.

36. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x - 3|}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

38. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^2}{1 + x} & \text{si } x \neq -1 \\ 1 & \text{si } x = -1. \end{cases}$

¿Es continua f en -1? Justifique su respuesta

39. Sea $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-3x+2} & \text{si } x\neq 2\\ 7 & \text{si } x=2.\end{cases}$

¿Es continua f en $x = 2$? Justifique su respuesta.

40. Sea $f(x) = 0$ si x es racional, y $f(x) = 1$ si x es irracional. Demuestre que f es discontinua en todos los números reales a.

41. Un vendedor tiene un salario básico de $12 000 (dólares) y recibe $1 000 de comisión por cada $50 000 de las ventas que excedan $100 000. Trace una gráfica que muestre su ingreso como función de las ventas. Discuta la continuidad de la función.

42. La cuota de un estacionamiento para automóviles es de $1.00 (dólar) por la primera media hora y $0.50 por cada media hora o fracción adicional, hasta un máximo de $5.00. Encuentre una función f que relacione la cuota con el tiempo que se deja un automóvil en el estacionamiento. Trace la gráfica de f y discuta la continuidad de f.

Ejercicios 43-46: Verifique el Teorema del Valor Intermedio (2.28) para la función f en el intervalo $[a, b]$, demostrando que si w es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número c en $[a, b]$ tal que $f(c) = w$.

43. $f(x) = x^3 + 1$; $[-1, 2]$

44. $f(x) = -x^3$; $[0, 2]$

45. $f(x) = x^2 + 4x + 4$; $[0, 1]$

46. $f(x) = x^2 - x$; $[-1, 3]$

47. Sea $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$. Use el Teorema del Valor Intermedio para demostrar que existe un número real a tal que $f(a) = 100$.

48. Demuestre que la ecuación $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1 = 0$ tiene una solución entre 0 y 1.

49. Un meteorólogo encuentra que la temperatura T (en °F) durante un frío día de invierno estuvo dada por

$$T = 0.05t(t - 12)(t - 24)$$

donde t es el tiempo (en horas) y $t = 0$ corresponde a las 6 A.M.

(a) Use el Corolario (2.30) para determinar cuándo la temperatura T estuvo arriba de 0° y cuándo estuvo abajo de 0°.

(b) Demuestre que la temperatura fue de 32°F en algún momento entre las 12 A.M. y la 1 P.M. (*Sugerencia:* Utilice el Teorema del Valor Intermedio.)

50. La temperatura T (en °C) a la que el agua hierve está dada aproximadamente por la fórmula

$$T = 100.862 - 0.0415\sqrt{h + 431.03}$$

donde h es la altura sobre el nivel del mar (en metros). Use el Teorema del Valor Intermedio para demostrar que entre los 4000 y los 4500 metros sobre el nivel del mar hay una altitud a la cual el agua hierve a 98°C.

Ejercicios 51-52: Use el Corolario (2.30) para encontrar todos los valores de x para los cuales (a) $f(x) > 0$; (b) $f(x) < 0$.

51. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$

52. $f(x) = x(x + 1)^2(x - 3)(x - 5)$

2.6 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Recta tangente a una gráfica.
2. Velocidad en el movimiento rectilíneo.
3. Definición del límite de una función.
4. Interpretaciones geométricas de $\lim_{x\to a} f(x) = L$.
5. Límites por la derecha y por la izquierda.
6. Teoremas sobre límites.
7. Límites de polinomios y funciones racionales.
8. Teorema de la Intercalación.
9. Función continua.
10. Tipos de discontinuidades de las funciones.
11. Teorema del Valor Intermedio.
12. Continuidad en un intervalo.

EJERCICIOS 2.6

Ejercicios 1-20: Calcule el límite si es que existe.

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{5x+11}{\sqrt{x+1}}$

2. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{6-7x}{(3+2x)^4}$

3. $\lim\limits_{x\to -2} (2x - \sqrt{4x^2+x})$

4. $\lim\limits_{x\to 4} (x - \sqrt{16-x^2})$

5. $\lim\limits_{x\to 3/2} \dfrac{2x^2+x-6}{4x^2-4x-3}$

6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-x-10}{x^2-x-2}$

7. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x^2-x-2}$

8. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3}$

9. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

10. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(1/x)-(1/5)}{x-5}$

11. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{8x^3-1}{2x-1}$

12. $\lim\limits_{x\to 2} 5$

13. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{3-x}{|3-x|}$

14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

15. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(a+h)^4-a^4}{h}$

16. $\lim\limits_{x\to -3} \sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x^3+27}}$

17. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^{-3}-2^{-3}}{h}$

18. $\lim\limits_{x\to 5/2^-} (\sqrt{5-2x} - x^2)$

19. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{(x-2)^2}}{2-x}$

20. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{|x-1|}$

Ejercicios 21-26: Trace la gráfica de la función f definida parte por parte y calcule

(a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y (c) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

para el valor de a indicado, si es que el límite existe.

21. $a=2$; $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

22. $a=2$; $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \le 2 \\ 4-2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

23. $a=-3$; $f(x) = \begin{cases} 1/(2-3x) & \text{si } x < -3 \\ \sqrt[3]{x+2} & \text{si } x \ge -3 \end{cases}$

24 $a=-3$; $f(x) = \begin{cases} 9/x^2 & \text{si } x \le -3 \\ 4+x & \text{si } x > -3 \end{cases}$

25. $a=1$; $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ 4-x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

26. $a=0$; $f(x) = \begin{cases} (x^4+x)/x & \text{si } x \ne 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Ejercicios 27-28: Calcule el límite. ($[\![\ ]\!]$ denota la función mayor entero.)

27. $\lim\limits_{x\to 3^+} ([\![x]\!] - x^2)$

28. $\lim\limits_{x\to 3} ([\![x]\!] - x^2)$

29. Demuestre directamente a partir de la Definición (2.10) para el límite que

$$\lim_{x\to 6} (5x-21) = 9.$$

30. Sea $f(x) = 1$ si x es racional y $f(x) = -1$ si x es irracional. Demuestre que para todo número real a no existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

Ejercicios 31-34: Encuentre todos los números en los que f es continua.

31. $f(x) = 2x^4 - \sqrt[3]{x} + 1$

32. $f(x) = \sqrt{(2+x)(3-x)}$

33. $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^4-16}$

34. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}$

Ejercicios 35-38: Determine las discontinuidades de f.

35. $f(x) = \dfrac{|x^2-16|}{x^2-16}$

36. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-16}$

37. $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x}$

38. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^3-8}$

39. Sea $f(x) = 1/x^2$. Verifique el Teorema del Valor Intermedio (2.28) para f en el intervalo [2, 3]

CAPÍTULO 3

LA DERIVADA

*La **derivada de una función** es uno de los instrumentos más poderosos de las matemáticas y las ciencias aplicadas. En este capítulo se define la derivada y se discuten muchas de las propiedades relacionadas con este concepto tan importante.*

3.1 DEFINICIÓN DE LA DERIVADA

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al número real a. En la Figura 3.1 se ilustran la gráfica de f y una recta secante l_{PQ} que pasa por $P(a, f(a))$ y $Q(x, f(x))$. La recta de trazo punteado l representa una posible recta tangente en el punto P.

FIGURA 3.1

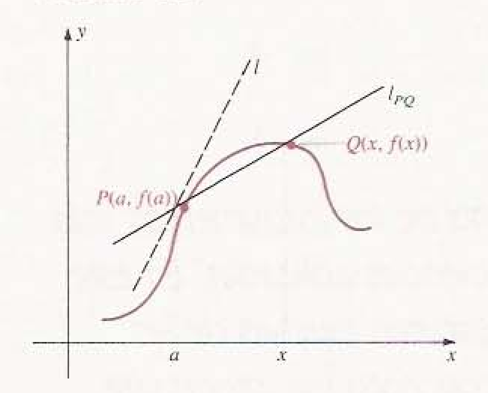
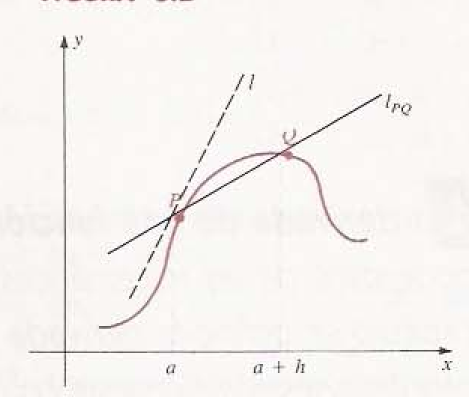


FIGURA 3.2



En la Sección 2.1 definimos la pendiente m de l como el valor de límite de la pendiente de l_{PQ} cuando Q tiende a P. Así, de la Definición 2.2,

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre y cuando el límite exista. Si se introduce una nueva variable h tal que $x = a + h$ (es decir, $h = x - a$), como se ilustra en la Figura 3.2, se obtiene la siguiente fórmula para m:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

que es equivalente a la anterior. En el Apéndice II se da una demostración de esta equivalencia. El límite anterior es uno de los conceptos fundamentales del cálculo y se llama *derivada de la función f en a*.

DEFINICIÓN (3.1)

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a a. La **derivada de f en a**, denotada por $f'(a)$, está dada por

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

La fórmula para $f'(a)$ también se puede escribir como sigue:

DEFINICIÓN (3.1′) ALTERNA

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

El símbolo $f'(a)$ se lee *f prima de a*. La frase $f'(a)$ *existe* significa que el límite en las Definiciones (3.1) y (3.1′) existe. Si $f'(a)$ existe decimos que la función f **es derivable en** a, que **es diferenciable en** a o que f **tiene derivada en** a.

Suponiendo que las funciones f y s de las Definiciones (2.2) y (2.5) de la Sección 2.1 son derivables en a, se pueden enunciar dichas definiciones de la siguiente manera:

APLICACIONES DE LA DERIVADA (3.2)

(i) **Recta tangente:** La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es $f'(a)$.

(ii) **Velocidad:** Si un punto P se mueve a lo largo de una recta coordenada de manera que al tiempo t su coordenada es $s(t)$, entonces su velocidad al tiempo a es $s'(a)$.

Más adelante en el texto se presentan otras aplicaciones de la derivada.

Una función f **es derivable en un intervalo abierto** (a, b) si lo es en todos los números c de (a, b). También se considerarán funciones que son derivables en un intervalo infinito (a, ∞), $(-\infty, a)$ o bien $(-\infty, \infty)$. Para intervalos cerrados usamos la siguiente convención que es análoga a la definición de continuidad en un intervalo cerrado dada en (2.24).

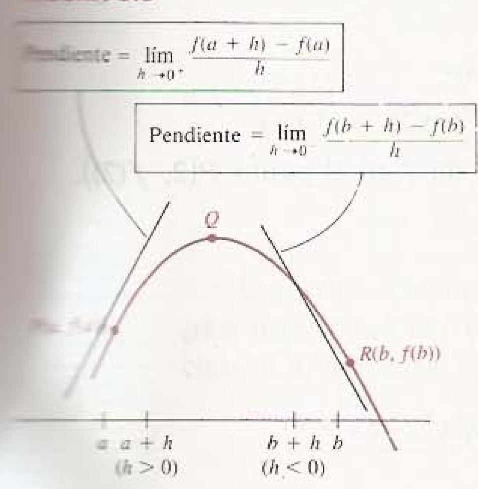
DEFINICIÓN (3.3)

Una función f **es derivable en un intervalo cerrado** $[a, b]$ si lo es en el intervalo abierto (a, b) y los límites

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b + h) - f(b)}{h}$$

existen.

FIGURA 3.3



Los límites por la derecha y por la izquierda en la Definición (3.3) se llaman **derivada por la derecha** y **derivada por la izquierda** de f en a y b, respectivamente. Nótese que para la derivada por la derecha se tiene que $h \to 0^+$ y $a + h$ tiende a *a por la derecha*. Para la derivada por la izquierda se tiene que $h \to 0^-$ y $b + h$ tiende a *b por la izquierda*.

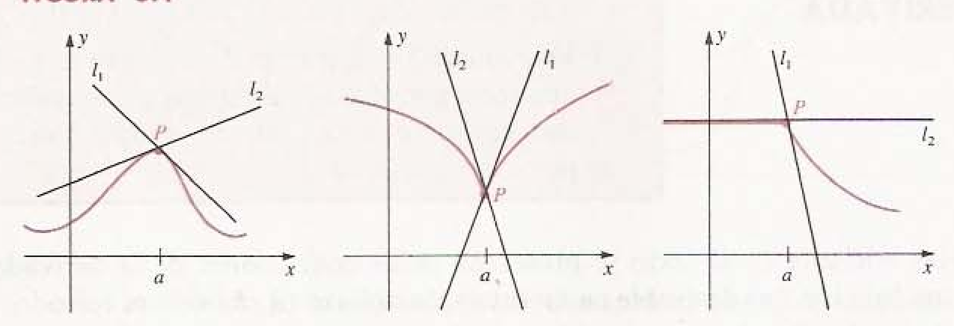
Si f es una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ y no está definida fuera de él, entonces las derivadas por la derecha y por la izquierda permiten definir las pendientes de las rectas tangentes en los puntos $P(a, f(a))$ y $R(b, f(b))$, respectivamente, como se ilustra en la Figura 3.3. Por lo tanto, para obtener la pendiente de la recta tangente en P se toma el valor límite de las pendientes de las rectas

secantes que pasan por P y Q cuando Q tiende a P por la derecha. Para la recta tangente en R, el punto Q tiende a R por la izquierda.

La derivabilidad de una función en intervalos de la forma $[a, b)$, $[a, \infty)$, $(a, b]$, o bien $(-\infty, b]$ se define usando los límites por la izquierda o por la derecha en uno de los puntos extremos.

Si f está definida en un intervalo abierto que contiene a a, entonces $f'(a)$ *existe si y sólo si las derivadas por la derecha y por la izquierda en a existen y son iguales.* Las funciones cuyas gráficas se muestran en la Figura 3.4 tienen derivadas por la derecha y por la izquierda en a que corresponden a las pendientes de las rectas l_1 y l_2, respectivamente. Sin embargo, como las pendientes de l_1 y l_2 no son iguales, $f'(a)$ no existe. En general, si la gráfica de f tiene un *pico* en el punto $P(a, f(a))$, entonces f no es derivable en a.

FIGURA 3.4



Si f es derivable para todo x en un intervalo entonces, asociando a cada x el número $f'(x)$, se obtiene una función f' llamada **derivada de** f. El valor de f' en x está dado por el siguiente límite (o por un límite unilateral).

LA DERIVADA COMO UNA FUNCIÓN (3.4)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Nótese que en (3.4) el número x es fijo pero arbitrario y el límite se toma haciendo tender h a cero. *Derivar* $f(x)$ *o encontrar la derivada de* $f(x)$ significa determinar $f'(x)$.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$. Encontrar:

(a) $f'(x)$; (b) el dominio de f'; (c) $f'(2)$, $f'(-\sqrt{2})$ y $f'(a)$;

(d) una ecuación para la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(2, f(2))$.

Solución

(a) Por (3.4),

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h)^2 - 5(x+h) + 4] - (3x^2 - 5x + 4)}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 4) - (3x^2 - 5x + 4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h} = \lim_{h \to 0} (6x + 3h - 5)$$

$$= 6x - 5$$

(b) Como $f'(x) = 6x - 5$, la derivada existe para todo número real x. Por lo tanto el dominio de f' es $\mathbb{R}$.

(c) Sustituyendo x en $f'(x) = 6x - 5$,

$$f'(2) = 6(2) - 5 = 7$$

$$f'(-\sqrt{2}) = 6(-\sqrt{2}) - 5 = -(6\sqrt{2} + 5)$$

$$f'(a) = 6a - 5$$

(d) Como $f(2) = 3(2)^2 - 5(2) + 4 = 12 - 10 + 4 = 6$, el punto $P(2, f(2))$ en la gráfica de f tiene coordenadas (2,6). Por (3.2) (i), la pendiente de la recta tangente en P es $f'(2) = 7$ (ver (c)). Usando la forma de la ecuación de la recta dados un punto y su pendiente (1.15), se obtiene la siguiente ecuación para la recta tangente en P:

$$y - 6 = 7(x - 2), \quad \text{o, equivalentemente,} \quad 7x - y - 8 = 0.$$

EJEMPLO 2 Encontrar $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt{x}$. ¿Cuál es el dominio de f'?

Solución El dominio de f consta de todos los números reales no negativos. Examinaremos los casos $x > 0$ y $x = 0$ por separado. Si $x > 0$ entonces, por (3.4),

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}.$$

Para encontrar el límite, se racionaliza el numerador y luego simplificamos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Como $x = 0$ es un punto extremo del dominio de f, debe usarse un límite unilateral para determinar si $f'(0)$ existe. Suponiendo que f es derivable en 0 y usando la Definición (3.4) con $x = 0$, obtenemos

$$f'(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{0 + h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Como este límite no existe (véase el Ejercicio 46 de la Sección 2.4), $f'(0)$ tampoco existe. Por lo tanto, el dominio de f' es el conjunto de los números reales positivos. •

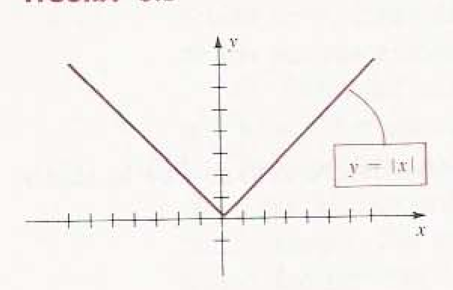


FIGURA 3.5

EJEMPLO 3 Sea $f(x) = |x|$. Demostrar que f no es derivable en 0.

Solución En el Ejemplo 8 de la Sección 1.4 se estudió la gráfica de f que se ilustra nuevamente en la Figura 3.5. Geométricamente es obvio que f no tiene derivada en 0 pues la gráfica tiene un pico en el origen. Puede demostrarse que $f'(0)$ no existe haciendo ver que las derivadas de f por la derecha y por la izquierda en 0 no son iguales. Usando los límites de la Definición (3.3) con $a = 0$ y $b = 0$ obtenemos:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

Por lo tanto, $f'(0)$ no existe. •

Del Ejemplo 3 se concluye que la gráfica de $y = |x|$ no tiene una recta tangente en el punto $P(0, 0)$.

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación de la definición equivalente (3.1′) para calcular $f'(a)$.

EJEMPLO 4 Sean $f(x) = x^{1/3}$ y $a \neq 0$. Obtener $f'(a)$.

Solución Usando (3.1′),

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{x - a}$$

si el límite existe. Para investigar la existencia del límite se requiere modificar la forma del cociente. Un medio para hacerlo es escribir

$$\lim_{x\to a} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{(x^{1/3})^3 - (a^{1/3})^3}.$$

El denominador puede factorizarse usando la fórmula

$$p^3 - q^3 = (p - q)(p^2 + pq + q^2)$$

con $p = x^{1/3}$ y $q = a^{1/3}$. Esto da

$$\lim_{x\to a} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{(x^{1/3} - a^{1/3})(x^{2/3} + x^{1/3}a^{1/3} + a^{2/3})}.$$

Dividiendo el numerador y el denominador entre $x^{1/3} - a^{1/3}$ y tomando el límite obtenemos

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{1}{x^{2/3} + x^{1/3}a^{1/3} + a^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{a^{2/3} + a^{2/3} + a^{2/3}} = \frac{1}{3a^{2/3}}$$ •

TEOREMA (3.5) Si una función f es derivable en a entonces f es continua en a.

Demostración Si x está en el dominio de f y $x \neq a$, entonces $f(x)$ puede expresarse como sigue:

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a).$$

Usando los teoremas sobre límites y la Definición (3.2),

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(a) + \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a)$$

$$= f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a).$$

Por lo tanto, de acuerdo con la Definición (2.23), f es continua en a. • •

Aplicando los límites unilaterales, se puede generalizar el Teorema (3.5) para incluir funciones derivables en un intervalo cerrado.

El recíproco del Teorema (3.5) es falso porque *existen funciones continuas que no son derivables*. Por ejemplo, si $f(x) = |x|$ entonces f es continua en 0; pero se demostró en el Ejemplo 3 que f no es derivable en 0 (véase la Figura 3.5).

Cuando $y = f(x)$ se utilizan las siguientes notaciones para las derivadas.

NOTACIONES (3.6) PARA LAS DERIVADAS

$$f'(x) = D_x[f(x)] = D_x y = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)]$$

Todas las notaciones anteriores se utilizan en las matemáticas y sus aplicaciones, y es recomendable que el lector se familiarice con ellas.

El subíndice x en el símbolo D_x se utiliza para designar a la variable independiente. Por ejemplo, si la variable independiente es t, escribimos $f'(t) = D_t[f(t)]$. Los símbolos D_x y D_t se llaman **operadores diferenciales**. El símbolo D_x por sí solo no tiene significado simple; sin embargo, si se le agrega a la derecha una expresión que incluya a x, entonces denota a la derivada. Para ilustrar esto, usando el Ejemplo 1,

$$D_x(3x^2 - 5x + 4) = 6x - 5.$$

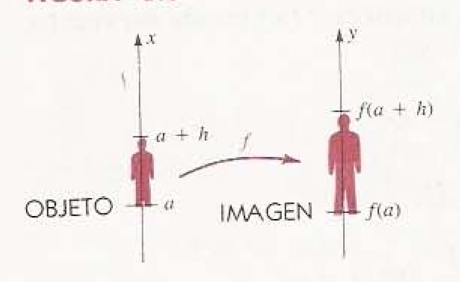
Se dice que D_x *opera* sobre la expresión $3x^2 - 5x + 4$. La expresión $D_x y$ puede leerse como **derivada de y con respecto a x**. El símbolo d/dx se utiliza de manera parecida, por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}(3x^2 - 5x + 4) = 6x - 5.$$

Como se indica en (3.6), las notaciones y' y dy/dx también se usan para denotar la derivada de y con respecto a x. En la Sección 3.4 se justifica la notación dy/dx con base en el concepto de *diferencial*.

Concluimos esta sección con una aplicación especializada de la derivada.

FIGURA 3.6



EJEMPLO 5 En óptica, una función f tal que $f'(x) > 1$ para todo x, puede considerarse como una transformación que amplifica objetos. Como se ilustra en la Figura 3.6, la función f transforma un objeto que se extiende sobre el intervalo de x $[a, a + h]$ en uno que se extiende sobre el intervalo de y $[f(a), f(a + h)]$. (Piénsese en una fuente de luz a la izquierda del eje x que proyecta la imagen en una película localizada sobre el eje x sobre una pantalla ubicada sobre el eje y.) La *amplificación M de f* para $[a, a + h]$ se define como la razón del tamaño (o altura) de la imagen al tamaño (altura) del objeto. El valor de M puede variar dependiendo del intervalo $[a, a + h]$. La *amplificación M_a* en $x = a$ se define como $\lim_{h\to 0} M$.

(a) Expresar M y M_a en términos de f.

(b) Sea $f(x) = x^2$. Calcular M_1 y M_2.

Solución

(a) El tamaño del objeto es $(a + h) - a = h$ y el tamaño de la imagen es $f(a + h) - f(a)$. Por lo tanto,

$$M = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad \text{y} \quad M_a = \lim_{h\to 0} M = f'(a)$$

(b) Si $f(x) = x^2$ entonces, del Ejemplo 1 de la Sección 2.1, $f'(a) = 2a$, y por lo tanto, $M_1 = f'(1) = 2$ y $M_2 = f'(2) = 4$. Nótese que la amplificación en $x = 2$ es el doble de la amplificación en $x = 1$. •

EJERCICIOS 3.1

Ejercicios 1-10: (a) Use (3.4) para calcular $f'(x)$. (b) Encuentre el dominio de f'. (c) Obtenga una ecuación para la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(1, f(1))$.

1. $f(x) = 37$

2. $f(x) = 17 - 6x$

3. $f(x) = 9x - 2$

4. $f(x) = 7x^2 - 5$

5. $f(x) = 2 + 8x - 5x^2$

6. $f(x) = x^3 + x$

7. $f(x) = 1/(x - 2)$

8. $f(x) = (1 + \sqrt{3})^2$

9. $f(x) = \sqrt{3x + 1}$

10. $f(x) = 1/(2x)$

Ejercicios 11-14: Calcule $D_x y$.

11. $y = 7/\sqrt{x}$

12. $y = (2x + 3)^2$

13. $y = 2x^3 - 4x + 1$

14. $y = x/(3x + 4)$

Ejercicios 15-20: Calcule $f'(a)$ utilizando (3.1').

15. $f(x) = x^2$

16. $f(x) = \sqrt{2x}$

17. $f(x) = 6/x^2$

18. $f(x) = 8 - x^3$

19. $f(x) = 1/(x + 5)$

20. $f(x) = \sqrt{x}$

Ejercicios 21-22: Use las derivadas por la derecha y por la izquierda para demostrar que f no es derivable en $x = 5$.

21. $f(x) = |x - 5|$

22. $f(x) = [\![x]\!]$ (f es la función mayor entero)

Ejercicios 23-26: Trace la gráfica de f y úsela para encontrar el dominio de f'.

23. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

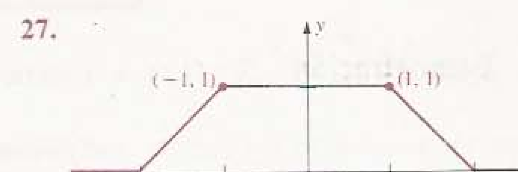
25. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 2 - |x| & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

26. $f(x) = \begin{cases} x - [\![x]\!] & \text{si } n \leq x < n + 1 \text{ y } n \text{ es un entero par} \\ 1 - x + [\![x]\!] & \text{si } n \leq x \leq n + 1 \text{ y } n \text{ es un entero impar} \end{cases}$

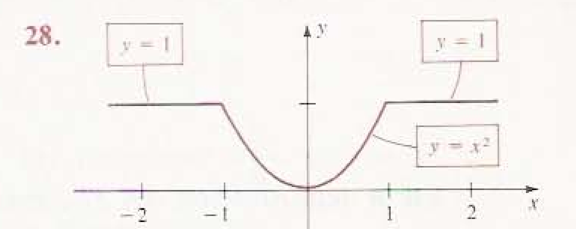
($[\![\ ]\!]$ denota la función mayor entero.)

Ejercicios 27-28: Cada figura muestra la gráfica de una función f. Trace la gráfica de f' y señale en dónde f *no* es derivable.

27.



28.



29. Sea $f(x) = |x|$. Demuestre que $f'(x) = 1$ si $x > 0$ y que $f'(x) = -1$ si $x < 0$.

30. Sea $f(x) = |x|/x$. Encuentre (a) el dominio de f'; (b) $f'(x)$ para todo x en el dominio de f'.

31. Demuestre que si $f(x)$ es un polinomio de grado 1 entonces $f'(x)$ es un polinomio de grado 0. ¿Qué sucede cuando $f(x)$ es un polinomio de grado 2 o 3?

32. Demuestre que $D_x c = 0$ para todo número real c.

3.2 ALGUNAS REGLAS PARA DETERMINAR DERIVADAS

Esta sección contiene algunas reglas generales que simplifican la tarea de encontrar derivadas. En los enunciados de los teoremas se usará el operador diferencial D_x para denotar derivadas (véase (3.6)). El primer resultado de esta sección se enuncia expresando: *la derivada de una constante es cero*.

TEOREMA (3.7)

$$D_x(c) = 0.$$

Demostración Sea f la función constante definida por $f(x) = c$ para todo x. Demostraremos que $f'(x) = 0$. Como todos los valores de f son iguales a c, resulta que $f(x + h) = c$ para todo h. Aplicando (3.4),

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

El último paso es consecuencia del Teorema (2.13). • •

TEOREMA (3.8)

$$D_x(x) = 1$$

Demostración Si $f(x) = x$ para todo x, entonces

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1 \quad \bullet \bullet$$

En la demostración del Teorema (3.10) se usará la siguiente fórmula.

TEOREMA (3.9) DEL BINOMIO

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

donde a y b son números reales, n es un entero positivo y

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 1} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

El Teorema del Binomio puede demostrarse por el método de inducción matemática. Los casos particulares para $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$ son:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

REGLA DE LA (3.10) POTENCIA

Si n es un entero positivo entonces $D_x(x^n) = nx^{n-1}$.

Demostración Sea $f(x) = x^n$. Se quiere demostrar que $f'(x) = nx^{n-1}$. Por (3.4),

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

si el límite existe. Usando el Teorema del Binomio (3.9) con $a = x$ y $b = h$.

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n.$$

Todos los términos después del primero contienen un factor h elevado a alguna potencia entera. Restando x^n y dividiendo entre h se obtiene

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-2)}{2!} x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right].$$

Como todos los términos dentro del paréntesis, excepto el primero, contienen una potencia de h, resulta que $f'(x) = nx^{n-1}$.

Para $x \neq 0$, la fórmula (3.10) es válida también cuando $n = 0$ pues en este caso $f(x) = x^0 = 1$ y, por el Teorema (3.7), $f'(x) = 0 = 0 \cdot x^{0-1}$. • •

EJEMPLO 1

(a) Evaluar $D_x(x^3)$ y $\frac{d}{dx}(x^8)$. **(b)** Encontrar $\frac{dy}{dx}$ si $y = x^{100}$.

Solución Aplicando la Regla de la Potencia (3.10),

(a) $D_x(x^3) = 3x^2$ y $\frac{d}{dx}(x^8) = D_x(x^8) = 8x^7$

(b) Si $y = x^{100}$, entonces $\frac{dy}{dx} = D_x\, y = D_x(x^{100}) = 100x^{99}$ •

Cuando se usan variables independientes diferentes de x, la Regla de la Potencia se escribe en términos de esas variables:

$$D_t(t^n) = nt^{n-1}, \qquad D_z(z^n) = nz^{n-1}, \qquad D_v(v^n) = nv^{n-1}.$$

En la Sección 3.6 se demuestra que la citada regla para las potencias es válida también cuando n es un número *racional*.

En los enunciados de los Teoremas (3.11) a (3.14) se supone que f y g son derivables en x.

TEOREMA (3.11) $D_x[cf(x)] = cD_x[f(x)]$

Demostración Tomando $g(x) = cf(x)$, se tiene

$$\begin{aligned} D_x[cf(x)] = D_x[g(x)] &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \\ &= c \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= cf'(x) = cD_x[f(x)] \end{aligned}$$ • •

Para el caso especial $f(x) = x^n$, los Teoremas (3.11) y (3.10) dan la siguiente fórmula que es válida para todo número real c y para todo entero positivo n:

$$D_x(cx^n) = (cn)x^{n-1}$$

Así, *para derivar cx^n se multiplica el coeficiente c por el exponente n y se le resta 1 al exponente original.*

EJEMPLO 2

(a) Encontrar $D_x(7x^4)$. **(b)** Encontrar $F'(z)$ para $F(z) = -3z^{15}$.

Solución Por los comentarios anteriores tenemos

(a) $D_x(7x^4) = (7 \cdot 4)x^3 = 28x^3$

(b) $F'(z) = D_z(-3z^{15}) = (-3)(15)z^{14} = -45z^{14}$ •

TEOREMA (3.12)

(i) $D_x[f(x) + g(x)] = D_x[f(x)] + D_x[g(x)]$

(ii) $D_x[f(x) - g(x)] = D_x[f(x)] - D_x[g(x)]$

Demostración Para demostrar (i) tomamos $k(x) = f(x) + g(x)$. Demostraremos que $k'(x) = f'(x) + g'(x)$. Esto puede hacerse como sigue:

$$\begin{aligned} k'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Se puede usar un razonamiento semejante para demostrar la parte (ii). • •

El Teorema (3.12) (i), el cual expresa que *la derivada de una suma es la suma de las derivadas*, puede generalizarse al caso de sumas de un número arbitrario de funciones.

Como un polinomio es una suma de términos de la forma, cx^n donde c es un número real y n un entero no negativo, pueden usarse los resultados sobre derivadas de sumas y diferencias para evaluar la derivada, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Encontrar $f'(x)$ para $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x + 1$.

Solución

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= D_x\,(2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x + 1)\\
&= D_x\,(2x^4) - D_x\,(5x^3) + D_x\,(x^2) - D_x\,(4x) + D_x\,(1)\\
&= 8x^3 - 15x^2 + 2x - 4
\end{aligned}
$$

•

REGLA DEL PRODUCTO (3.13)

$$D_x\,[f(x)g(x)] = f(x)\,D_x\,[g(x)] + g(x)\,D_x\,[f(x)]$$

Demostración Sea $k(x) = f(x)g(x)$. Demostraremos que

$$k'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Si $k'(x)$ existe, entonces

$$
\begin{aligned}
k'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h}\\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.
\end{aligned}
$$

Para cambiar la forma del cociente de manera que el límite pueda evaluarse, sumamos y restamos la expresión $f(x+h)g(x)$ en el numerador. Entonces

$$k'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

lo cual puede escribirse así

$$
\begin{aligned}
k'(x) &= \lim_{h \to 0} \left[f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]\\
&= \lim_{h \to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \to 0} g(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.
\end{aligned}
$$

Como f es derivable en x también es continua en x (véase el Teorema (3.5)). Por lo tanto $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$. También $\lim_{h \to 0} g(x) = g(x)$, ya que x se mantiene fijo al tomar el límite. Finalmente, aplicando la definición de derivada a $f(x)$ y $g(x)$ se obtiene

$$k'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

• •

La Regla del Producto puede enunciarse como sigue: *La derivada de un producto es igual al primer factor multiplicado por la derivada del segundo, más el segundo factor multiplicado por la derivada del primero.*

EJEMPLO 4 Encontrar $f'(x)$ para $f(x) = (x^3 + 1)(2x^2 + 8x - 5)$.

Solución Usando la Regla del Producto (3.13),

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x^3 + 1)\,D_x\,(2x^2 + 8x - 5) + (2x^2 + 8x - 5)\,D_x\,(x^3 + 1)\\
&= (x^3 + 1)(4x + 8) + (2x^2 + 8x - 5)(3x^2)
\end{aligned}
$$

$$= (4x^4 + 8x^3 + 4x + 8) + (6x^4 + 24x^3 - 15x^2)$$
$$= 10x^4 + 32x^3 - 15x^2 + 4x + 8$$

En el Ejemplo 4 también se puede evaluar $f'(x)$ multiplicando primero los dos factores $x^3 + 1$ y $2x^2 + 8x - 5$ y derivando el polinomio resultante.

REGLA DEL COCIENTE (3.14)

$$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\,D_x\,[f(x)] - f(x)\,D_x\,[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

siempre y cuando $g(x) \neq 0$.

Demostración Sea $k(x) = f(x)/g(x)$. Demostraremos que

$$k'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Usando las definiciones para $k'(x)$ y $k(x)$,

$$k'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{k(x+h) - k(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}.$$

Restando y sumando $g(x)f(x)$ en el numerador del último cociente resulta

$$k'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h) - g(x)f(x) + g(x)f(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

o, equivalentemente,

$$k'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\left[\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] - f(x)\left[\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]}{g(x+h)g(x)}$$

Tomando el límite del numerador y el denominador se obtiene la Regla del Cociente. • •

La citada Regla del Cociente puede enunciarse como sigue: *La derivada de un cociente es igual al denominador multiplicado por la derivada del numerador menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo ello dividido entre el cuadrado del denominador.*

EJEMPLO 5 Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ para $y = \dfrac{3x^2 - x + 2}{4x^2 + 5}$.

Solución Por la Regla del Cociente (3.14),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(4x^2+5)\,D_x\,(3x^2-x+2)-(3x^2-x+2)\,D_x\,(4x^2+5)}{(4x^2+5)^2}\\ &= \frac{(4x^2+5)(6x-1)-(3x^2-x+2)(8x)}{(4x^2+5)^2}\\ &= \frac{(24x^3-4x^2+30x-5)-(24x^3-8x^2+16x)}{(4x^2+5)^2}\\ &= \frac{4x^2+14x-5}{(4x^2+5)^2}\end{aligned}$$

•

Ahora resulta fácil generalizar la Regla de la Potencia (3.10) al caso en que el exponente sea un entero negativo.

TEOREMA (3.15) Si n es un entero positivo, entonces $D_x(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$

Demostración Usando la definición de x^{-n} y la Regla del Cociente (3.14),

$$\begin{aligned}D_x\,(x^{-n}) = D_x\left(\frac{1}{x^n}\right) &= \frac{x^n\,D_x\,(1) - 1\,D_x\,(x^n)}{(x^n)^2}\\ &= \frac{x^n(0) - 1(nx^{n-1})}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}\\ &= -nx^{(n-1)-2n} = -nx^{-n-1}\end{aligned}$$

• •

EJEMPLO 6 Derivar estas funciones: **(a)** $g(x) = 1/w^4$ **(b)** $H(s) = 3/s$.

Solución

(a) Escribiendo $g(w) = w^{-4}$ y usando el Teorema (3.15) (con w como la variable independiente),

$$g'(w) = D_w\,(w^{-4}) = -4w^{-5} = -\frac{4}{w^5}$$

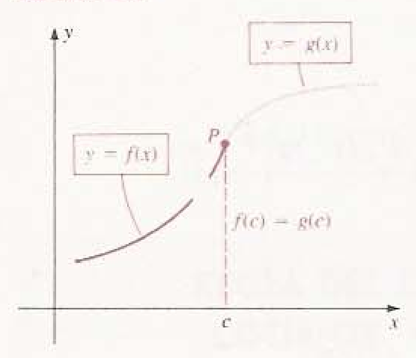
(b) Como $H(s) = 3s^{-1}$,

$$H'(s) = D_s\,(3s^{-1}) = 3(-1)s^{-2} = -\frac{3}{s^2}$$

•

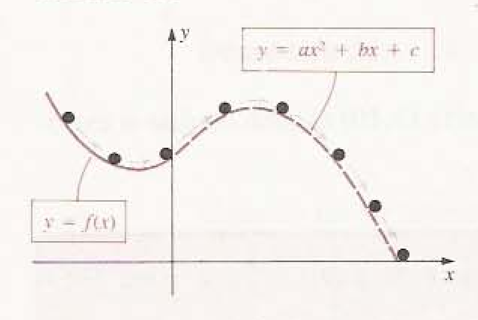
Sean f y g funciones derivables tales que $f(c) = g(c)$ para un número c. En algunas aplicaciones puede considerarse una partícula que se mueve de izquierda a derecha sobre la gráfica de f y luego cambia a la gráfica de g en el punto $P(c,\ f(c))$, como se

FIGURA 3.7



ilustra en la Figura 3.7. Se dice que la transición es **suave** (o **alisada**) si $f'(c) = g'(c)$ (o si la derivada por la izquierda de f en c es igual a la derivada por la derecha de g en c). En ese caso las rectas tangentes en $P(c, f(c))$ tienen la misma pendiente. Este concepto se usa en el siguiente ejemplo (véase también el Ejercicio 53).

FIGURA 3.8



EJEMPLO 7 Una pelota rueda por el tobogán de una piscina. Al llegar al extremo del tobogán su trayectoria cambia suavemente a una trayectoria parabólica que conserva hasta que cae al agua. El movimiento de la pelota se ilustra en la Figura 3.8, donde la gráfica de $y = f(x)$ representa la forma del tobogán y la trayectoria parabólica es la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$. El extremo del citado tobogán se encuentra sobre el eje y y el nivel del agua coincide con el eje x.

(a) Demostrar que $c = f(0)$ y $b = f'(0)$. (La constante a depende del ímpetu (o moméntum) de la pelota en $x = 0$.)

(b) Calcular la altura máxima del movimiento libre de la pelota suponiendo que $f(x) = 2 + [x/(1 + x^2)]$ y que la bola toca el agua en el punto (6, 0).

Solución

(a) El número c es la ordenada en el origen tanto de la parábola como de la gráfica de f y, por lo tanto, $c = f(0)$.

La pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto (x, y) es $y' = 2ax + b$. En particular, en $(0, c)$ la pendiente es $2a(0) + b = b$. Como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f es $f'(0)$ y el cambio de trayectoria es suave, necesariamente, $b = f'(0)$.

(b) Por los Teoremas (3.12) y (3.7) y la Regla del Cociente (3.14),

$$f'(x) = 0 + \frac{(1 + x^2)(1) - x(2x)}{(1 + x^2)} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

De los resultados de la parte (a), $b = f'(0) = 1$ y $c = f(0) = 2$. Por lo tanto,

$$y = ax^2 + x + 2.$$

es la ecuación de una parábola. Como (6, 0) es un punto sobre la parábola,

$$0 = a(36) + 6 + 2 \quad \text{y} \quad a = -\tfrac{8}{36} = -\tfrac{2}{9}.$$

Entonces resulta que

$$y = -\tfrac{2}{9}x^2 + x + 2.$$

es la ecuación de una parábola. La altura máxima durante el vuelo corresponde al vértice de la parábola, que es también el punto en el que la pendiente de la recta tangente es 0; es decir, $y' = 0$. Se deja al lector el trabajo de verificar que este es el punto $(\tfrac{9}{4}, \tfrac{25}{8})$. Por lo tanto, la citada altura máxima es $\tfrac{25}{8}$. •

Las fórmulas de derivación (3.12), (3.13) y (3.14) están expresadas en términos de los valores $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ y $g'(x)$. Si se desea enunciar estas reglas sin hacer referencia a la variable x, pueden aplicarse las siguientes fórmulas, en las que se supone que f y g son derivables (y que g es diferente de cero en la última de ellas).

(3.16)

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (f-g)' = f' - g'$$

$$(fg)' = fg' + gf' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}.$$

EJERCICIOS 3.2

Ejercicios 1-32: Derive la función.

1. $f(x) = 10x^2 + 9x - 4$
2. $f(x) = 6x^3 - 5x^2 + x + 9$
3. $f(s) = 15 - s + 4s^2 - 5s^4$
4. $f(t) = 12 - 3t^4 + 4t^6$
5. $g(x) = (x^3 - 7)(2x^2 + 3)$
6. $k(x) = (2x^2 - 4x + 1)(6x - 5)$
7. $h(r) = r^2(3r^4 - 7r + 2)$
8. $g(s) = (s^3 - 5s + 9)(2s + 1)$
9. $f(x) = \dfrac{4x - 5}{3x + 2}$
10. $h(x) = \dfrac{8x^2 - 6x + 11}{x - 1}$
11. $h(z) = \dfrac{8 - z + 3z^2}{2 - 9z}$
12. $f(w) = \dfrac{2w}{w^3 - 7}$
13. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 7$
14. $g(z) = 5z^4 - 8z^2 + z$
15. $F(t) = t^2 + (1/t^2)$
16. $s(x) = 2x + (2x)^{-1}$
17. $g(x) = (8x^2 - 5x)(13x^2 + 4)$
18. $H(y) = (y^5 - 2y^3)(7y^2 + y - 8)$
19. $G(v) = (v^3 - 1)/(v^3 + 1)$
20. $f(t) = (8t + 15)/(t^2 - 2t + 3)$
21. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$
22. $p(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$
23. $g(z) = z(2z^3 - 5z - 1)(6z^2 + 7)$
24. $N(v) = 4v(v - 1)(2v - 3)$
25. $K(s) = (3s)^{-4}$
26. $W(s) = (3s)^4$
27. $h(x) = (5x - 4)^2$
28. $g(r) = (5r - 4)^{-2}$
29. $f(t) = \dfrac{3/(5t) - 1}{(2/t^2) + 7}$
30. $S(w) = (2w + 1)^3$
31. $M(x) = (2x^3 - 7x^2 + 4x + 3)/x^2$
32. $f(x) = (3x^2 - 5x + 8)/7$

Ejercicios 33-34: Encuentre dy/dx usando (a) la Regla del Cociente (3.14), (b) la Regla del Producto (3.13), y (c) simplificando algebraicamente y usando (3.12) y (3.10).

33. $y = (3x - 1)/x^2$
34. $y = (x^2 + 1)/x^4$

35. Halle la ecuación para la recta tangente a la gráfica de $y = 5/(1 + x^2)$ en cada uno de los siguientes puntos:
    (a) $P(0, 5)$ (b) $P(1, \frac{5}{2})$ (c) $P(-2, 1)$

36. Halle la ecuación para la recta tangente a la gráfica de $y = 2x^3 + 4x^2 - 5x - 3$ en cada uno de los siguientes puntos:
    (a) $P(0, -3)$ (b) $P(-1, 4)$ (c) $P(1, -2)$

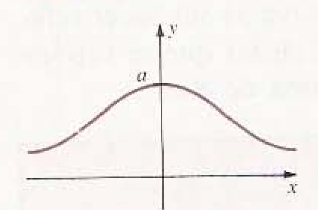
37. Encuentre la abscisa de todos los puntos de la gráfica de $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ en los que la recta tangente es (a) horizontal y (b) paralela a la recta $2y + 8x - 5 = 0$.

38. Encuentre el punto P en la gráfica de $y = x^3$ tal que la intercepción x de la recta tangente en P sea igual a 4.

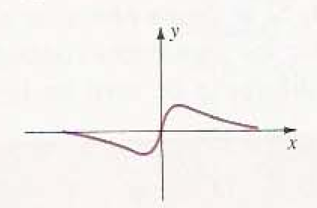
Ejercicios 39-40: Se dan la ecuación y la gráfica de una curva clásica, con a y b constantes positivas. (Consulte libros de geometría analítica para mayor información.) Calcule la pendiente de la recta tangente en el punto P.

39. *La curva de Agnesi:* $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}$; $P(a, a/2)$

EJERCICIO 39



EJERCICIO 40



40. *La curva serpentina:* $y = \dfrac{abx}{a^2 + x^2}$; $P(a, b/2)$

41. Encuentre una ecuación para la recta que pasa por al punto $P(5, 9)$ y es tangente a la gráfica de $y = x^2$.

42. Encuentre las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(5, 9)$ y es tangente a la gráfica de $xy = 4$.

Ejercicios 43-46: Suponiendo que f y g son funciones derivables tales que $f(2) = 3$, $f'(2) = -1$, $g(2) = -5$ y $g'(2) = 2$, encuentre los números indicados.

43. (a) $(f + g)'(2)$ (b) $(f - g)'(2)$
(c) $(4f)'(2)$ (d) $(fg)'(2)$
(e) $(f/g)'(2)$

44. (a) $(g - f)'(2)$ (b) $(g/f)'(2)$
(c) $(4g)'(2)$ (d) $(ff)'(2)$

45. (a) $(2f - g)'(2)$ (b) $(5f + 3g)'(2)$
(c) $(gg)'(2)$ (d) $\left(\dfrac{1}{f + g}\right)'(2)$

46. (a) $(3f - 2g)'(2)$ (b) $(5/g)'(2)$
(c) $(6f)'(2)$ (d) $\left(\dfrac{f}{f + g}\right)'(2)$

47. Suponiendo que f, g y h son derivables, use la Regla del Producto para demostrar que

$$D_x[f(x)g(x)h(x)] = f(x)g(x)h'(x) + f(x)h(x)g'(x) + h(x)g(x)f'(x).$$

Suponiendo que $f = g = h$, demuestre como corolario que

$$D_x[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x).$$

48. Amplíe el resultado anterior a un producto de cuatro funciones y obtenga una fórmula para $D_x[f(x)]^4$.

Ejercicios 49-50: Aplique el Ejercicio 47 para encontrar dy/dx.

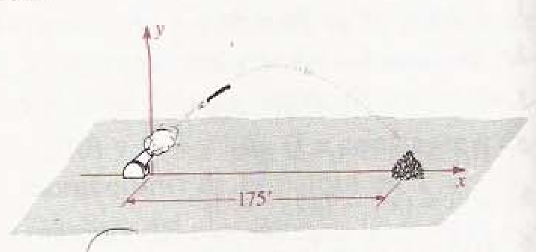
49. $y = (8x - 1)(x^2 + 4x + 7)(x^3 - 5)$

50. $y = (3x^4 - 10x^2 + 8)(2x^2 - 10)(6x + 7)$

51. En los años cuarenta, Emmanuel Zacchini del circo Ringling Brothers and Barnum & Bailey ejecutaba regularmente el acto de la bala humana. La boca del cañón se elevaba a 15 pie sobre el suelo y apuntaba según un ángulo de 45°. La trayectoria parabólica de Zacchini tenía un alcance horizontal de 175 pie (véase la figura).

(a) Encuentre una ecuación del tipo $y = ax^2 + bx + c$ que especifique la trayectoria parabólica.
(b) Calcule aproximadamente la altura máxima alcanzada por la bala humana.

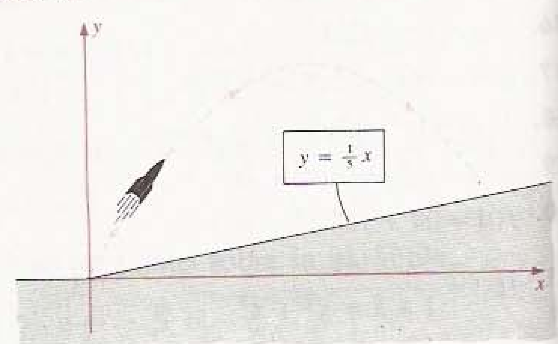
EJERCICIO 51



52. Un cohete que se tiene emplazado al pie de una colina cuya pendiente es $\frac{1}{5}$ se dispara hacia la loma y sigue una trayectoria dada por $y = -0.016x^2 + 1.6x$.

(a) ¿Cual es la pendiente de la trayectoria del cohete en el momento del disparo?
(b) ¿Cual es la pendiente de la trayectoria cuando choca contra la colina?
(c) Calcule la altura máxima del cohete *sobre el suelo*.

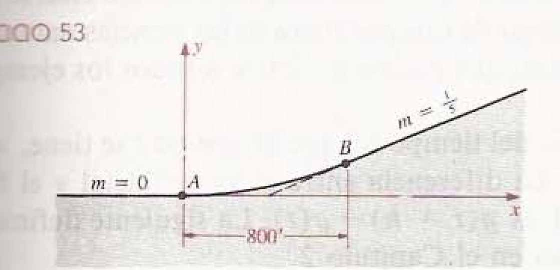
EJERCICIO 52



53. Un grupo de ingenieros de caminos diseña un tramo de carretera que debe conectar una autopista horizontal con otra que tiene una inclinación de 20° (es decir, una pendiente de $\frac{1}{5}$), como se ilustra en la figura. El enlace debe realizarse sobre una distancia horizontal de 800 pie usando

una curva parabólica para unir los puntos A y B. Obtenga una ecuación del tipo $y = ax^2 + bx + c$ para la parábola respectiva y determine las coordenadas de B.

EJERCICIO 53



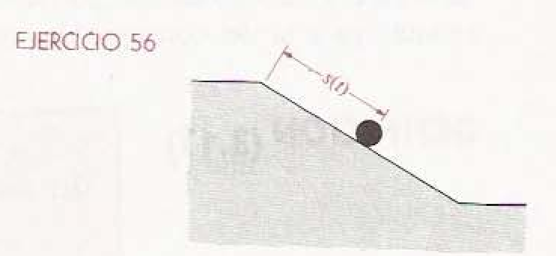
54. En la figura se muestra una gráfica generada por computadora de la ecuación $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$, para $0 \leq x \leq 3$.
(a) Determine la abscisa del punto P en el que la recta tangente es horizontal.
(b) ¿Existen otros puntos en la *gráfica completa* para los que $f'(x) = 0$?

EJERCICIO 54

55. Un globo meteorológico se eleva verticalmente de manera que su altura $s(t)$ sobre el suelo durante los primeros 10 segundos de su ascenso está dada por $s(t) = 6 + 2t + t^2$ para $s(t)$ en unidades de distancia (pies) y t en segundos.
(a) Calcule la velocidad del globo para $t = 1$, $t = 4$ y $t = 8$.
(b) Determine la velocidad del globo en el momento en que se encuentra a 50 pie del suelo.

56. Una pelota baja rodando por un plano inclinado de manera que la distancia (en centímetros) que recorre al cabo de 3 segundos está dada por $s(t) = 2t^3 + 3t^2 + 4$, donde $0 \leq t \leq 3$ (véase la figura).
(a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota en $t = 2$?
(b) ¿En qué momento alcanza una velocidad de 30 cm/s?

EJERCICIO 56



57. Dos atletas se disponen a correr los 100 metros planos. Las distancias $s_1(t)$ y $s_2(t)$ que cada uno de ellos recorre a los t segundos está dada por $s_1(t) = \frac{1}{5}t^2 + 8t$ y $s_2(t) = 1100t/(t + 100)$ para $t \geq 0$. Determine cuál de los corredores es (a) el más rápido en la salida; (b) el que gana la carrera; y (c) el más rápido al cruzar la meta.

58. Cuando cierto jugador de basquetbol (o baloncesto) salta para hacer un enceste, la altura de sus pies sobre el piso está dada por $s(t) = -\ gt^2 + 16t$ (s en pies).
(a) Suponiendo $g = 32$, calcule el *tiempo de vuelo* en que el jugador se halla en el aire.
(b) Determine la velocidad inicial y la *altura de salto* o distancia máxima que alcanzan sus pies sobre el suelo.
(c) En la Luna se tiene que $g \approx \frac{32}{6}$. Resuelva las partes (a) y (b) para este valor de g.

3.3 LA DERIVADA COMO TASA DE VARIACIÓN (O RAZÓN DE CAMBIO)

Se han estudiado ya dos aplicaciones importantes de la derivada: rectas tangentes a gráficas y la velocidad de un objeto que se mueve sobre una línea recta. La derivada es útil en muchas otras situaciones de la práctica. Se utilizó en el Ejemplo 5 de la Sección 3.1 para representar amplificaciones ópticas. En esta sección se estudian algunas otras aplicaciones que ilustran la gran utilidad de este poderoso concepto.

La mayoría de las cantidades que aparecen en la vida diaria cambian o varían en el tiempo. Esto es particularmente evidente en las investigaciones científicas. Por ejem-

plo un químico puede estar interesado en la rapidez con la que cierta sustancia se disuelve en agua. Un ingeniero eléctrico quizá necesite conocer la intensidad con la que la corriente varía en alguna parte de un circuito. Un biólogo puede desear saber la rapidez con la que las bacterias en un cultivo aumentan o disminuyen. Podrían citarse muchos otros ejemplos, incluyendo algunos otros de campos fuera de las ciencias naturales. Consideremos la siguiente situación general, que podría aplicarse a todos los ejemplos anteriores.

Sea w una variable que es una función del tiempo tal que al tiempo t se tiene, $w = g(t)$, donde g es una función derivable. La diferencia entre el valor inicial y el final de w en el intervalo de tiempo $[t, t + h]$ es $g(t + h) - g(t)$. La siguiente definición es análoga a la del concepto de velocidad en el Capítulo 2.

DEFINICIÓN (3.17)

Sea $w = g(t)$, donde g es derivable y t representa el tiempo.

(i) La **tasa (o razón) media de variación** de $w = g(t)$ en el intervalo $[t, t + h]$ es

$$\frac{g(t + h) - g(t)}{h}$$

(ii) La **tasa (o razón) de variación** de $w = g(t)$ con respecto a t es

$$\frac{dw}{dt} = g'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{g(t + h) - g(t)}{h}$$

Las unidades que deben usarse en la Definición (3.17) dependen de la naturaleza de la cantidad representada por w. A veces se llama a dw/dt la **tasa (o razón) instantánea de variación** de w con respecto a t.

EJEMPLO 1 Un físico descubre que cuando cierta sustancia se calienta, la temperatura, medida en grados Celsius (o centígrados) después de t minutos, está dada por $g(t) = 30t + 6\sqrt{t} + 8$ para $0 \leq t \leq 5$.

(a) Calcular la tasa media de cambio o variación de $g(t)$ durante el intervalo de tiempo $[4, 4.41]$.

(b) Calcular la tasa de variación de $g(t)$ en $t = 4$.

Solución

(a) Sustituyendo $t = 4$ y $h = 0.41$ en la Definición (3.17) (i) se obtiene que la tasa media de cambio de g en $[4, 4.41]$ es

$$\frac{g(4.41) - g(4)}{0.41} = \frac{[30(4.41) + 6\sqrt{4.41} + 8] - [120 + 6\sqrt{4} + 8]}{0.41}$$

$$= \frac{12.9}{0.41} \approx 31.46\ ^\circ\text{C/min}$$

(b) De acuerdo con la Definición (3.17) (ii) la razón o tasa de cambio de $g(t)$ al tiempo t es $g'(t)$. En el Ejemplo 2 de la Sección 3.1 demostramos que $D_x(\sqrt{x}) = 1/(2\sqrt{x})$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g'(t) &= D_t(30t + 6\sqrt{t} + 8) \\ &= 30 + 6\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) + 0 \\ &= 30 + \frac{3}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

En particular, la tasa de variación de $g(t)$ en $t = 4$ es

$$g'(4) = 30 + \frac{3}{\sqrt{4}} = 31.5\ ^\circ\text{C/min}$$

FIGURA 3.9

Tiempo Posición de P

Si un punto P se mueve sobre una recta coordenada l de manera que su coordenada al tiempo t es $s(t)$, como se ilustra en la Figura 3.9, entonces s es la función de posición de P. Según (3.2) (ii), la velocidad $v(t)$ de P al tiempo t es $s'(t)$. En términos de la Definición (3.17), la velocidad es la tasa de variación de $s(t)$ con respecto al tiempo (su rapidez de variación).

La *aceleración* $a(t)$ de P al tiempo t se define como la tasa de cambio de la velocidad con respecto al tiempo, es decir, $a(t) = v'(t)$. Por lo tanto la aceleración es la derivada $D_t[s'(t)]$ de $s'(t)$. En la Sección 3.7, $D_t[s'(t)]$ se llama la *segunda derivada* de s con respecto a t y se denota por $s''(t)$. La siguiente definición resume esta discusión e introduce el concepto de *rapidez de movimiento* (o valor absoluto de la velocidad) de P.

DEFINICIÓN (3.18)

Sea P un punto sobre una recta coordenada l tal que su posición al tiempo t está dada por $s(t)$, donde s es una función derivable.

(i) La **velocidad** $v(t)$ de P al tiempo t es $v(t) = s'(t)$.

(ii) La **rapidez** de P al tiempo t es $|v(t)|$.

(iii) La **aceleración** $a(t)$ de $P(t)$ al tiempo t es $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

En los términos de esta definición, v se llama la **función velocidad** de P, y a es la **función aceleración** de P. Se utiliza también la notación

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{y} \quad a = \frac{dv}{dt}.$$

Si t se mide en segundos (s) y $s(t)$ en centímetros (cm), entonces $v(t)$ se expresa en cm/s y $a(t)$ en cm/s^2 (centímetros por segundo por segundo, o por segundo al cuadrado). Si t se mide en horas y $s(t)$ en kilómetros o millas, entonces $v(t)$ se expresa en km/h o mi/h, y $a(t)$ en km/h^2 o mi/h^2, respectivamente.

En el Capítulo 2 se hizo notar que si $v(t)$ es positiva en un intervalo de tiempo, entonces el punto P se mueve en la dirección positiva de l. Si $v(t)$ es negativa entonces el movimiento es en la dirección negativa. La velocidad es cero en los puntos donde P cambia de dirección. Todo esto será demostrado en el Capítulo 4 junto con el hecho de que cuando la aceleración $a(t)$ es positiva, entonces la velocidad es creciente. Si $a(t)$ es negativa la velocidad es decreciente.

EJEMPLO 2 La función de posición s de un punto P que se mueve sobre una recta coordenada está dada por

$$s(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 20$$

en donde t se mide en segundos y $s(t)$ en centímetros. Describir el movimiento de P durante el intervalo de tiempo $[-1, 9]$.

Solución Derivando,

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 24t + 36 = 3(t-2)(t-6),$$

y

$$a(t) = v'(t) = 6t - 24 = 6(t-4).$$

Determinemos cuándo $v(t) > 0$ y cuándo $v(t) > 0$, pues esto indicará cuándo P se mueve hacia la derecha y cuándo hacia la izquierda. Vemos que $v(t) = 0$ en $t = 2$ y $t = 6$. Esto sugiere que se analice el movimiento en los siguientes intervalos de $[-1, 9]$:

$$(-1, 2) \qquad (2, 6) \qquad (6, 9)$$

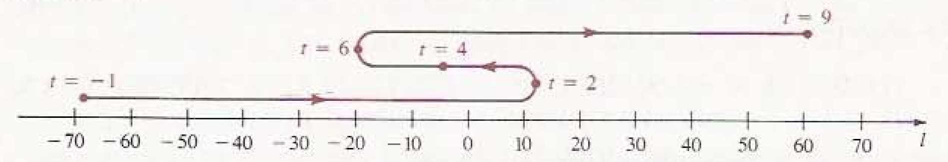
Como $v(t)$ es un polinomio, es positivo o negativo en cada uno de estos subintervalos (véase el Corolario (2.30)). Como en el Ejemplo 6 de la Sección 2.5, podemos determinar el signo de $v(t)$ usando valores de prueba, como se indica en esta tabla (verifíquese cada valor):

Intervalo de tiempo	$(-1, 2)$	$(2, 6)$	$(6, 9)$
k	0	3	7
Valor de prueba $v(k)$	36	-9	15
Signo de $v(t)$	+	−	+
Dirección del movimiento	a la derecha	a la izquierda	a la derecha

En la siguiente tabla se muestran los valores de la función de posición, la función velocidad y la función aceleración, en los extremos del intervalo de tiempo $[-1, 9]$, y también los tiempos en los que la velocidad o la aceleración valen cero.

t	-1	2	4	6	9
$s(t)$	-69	12	-4	-20	61
$v(t)$	63	0	-12	0	63
$a(t)$	-30	-12	0	12	30

FIGURA 3.10

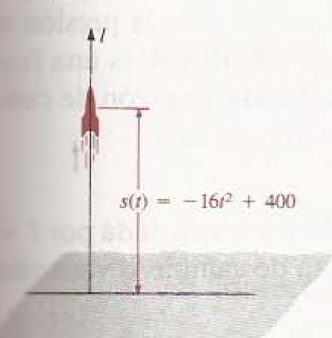


Es conveniente representar gráficamente el movimiento de P como en la Figura 3.10. La curva situada arriba de la recta coordenada no es la trayectoria del punto pero indica cómo se mueve P sobre la recta l.

Como está indicado en las tablas y en la Figura 3.10, al tiempo $t = -1$ el punto está a 69 cm a la izquierda del origen y se mueve hacia la derecha con una velocidad de 63 cm/s. La aceleración negativa de $-30\ \text{cm/s}^2$ indica que la velocidad está disminuyendo a razón de 30 centímetros por segundo en cada segundo (cm/s^2). El punto continúa moviéndose hacia la derecha pero más lento, hasta que su velocidad se vuelve cero en $t = 2$, 12 cm a la derecha del origen. En ese instante el punto P invierte la dirección (o sentido) de su movimiento y va hacia la izquierda, hasta que en el tiempo $t = 6$, 20 cm a la izquierda del origen, vuelve a cambiar de dirección. Continúa moviéndose a la derecha en el resto del intervalo de tiempo, aumentando su velocidad. El sentido del movimiento está indicado con flechas sobre la curva de la Figura 3.10. •

EJEMPLO 3 Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 120 m/s. Su altura sobre el suelo t segundos después está dada por $s(t) = -4.9t^2 + 120t$. Calcular el tiempo en el que el proyectil llegará al suelo de regreso y su velocidad en ese momento. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el proyectil? ¿Cuál es la aceleración en cualquier instante t?

FIGURA 3.11



Solución El proyectil se mueve sobre una recta coordenada vertical con el origen al nivel del suelo y dirección positiva hacia arriba, como se ilustra en la Figura 3.11. El proyectil se halla al nivel del suelo cuando $-4.9t^2 + 120t = 0$, es decir, cuando $-4.9t(t - 120/4.9) = 0$. Esto da $t = 0$ y $t = 120/4.9 \approx 24.5$. Por lo tanto, el proyectil tocará el suelo al caer de regreso a los 24.5 segundos. La velocidad al tiempo t es

$$v(t) = s'(t) = -9.8t + 120.$$

En particular, con $t = 120/4.9$, obtenemos la *velocidad de impacto*:

$$v(120/4.9) = -9.8(120/4.9) + 120 = -120\ \text{m/s}.$$

La velocidad negativa indica que en el instante en que el proyectil llega al suelo, se está moviendo en la dirección negativa de l (hacia abajo). Nótese que la *rapidez* en este tiempo es

$$|v(25)| = |-120| = 120\ \text{m/s}.$$

La altura máxima se alcanza cuando la velocidad es cero, es decir, cuando $s'(t) =$

$-9.8t + 120 = 0$. Despejando t obtenemos $t = 120/9.8 \approx 12.24$ s, y por lo tanto la altura máxima es

$$s(120/9.8) = -4.9(120/9.8)^2 + 120(120/9.8) = 7200/9.8 \approx 734.7 \text{ m}.$$

Finalmente, la aceleración al tiempo t vale

$$a(t) = v'(t) = -9.8 \text{ m/s}^2.$$

Esta aceleración constante se debe a la fuerza de gravedad. •

Se pueden estudiar razones de cambio o tasas de variación con respecto a variables distintas del tiempo, como indica en la siguiente definición.

DEFINICIÓN (3.19) Sea $y = f(x)$, donde x es cualquier variable.

(i) La **tasa media de variación de y con respecto a x en el intervalo $[x, x + h]$** es el cociente

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(ii) La **tasa de variación de y con respecto a x** es el límite de la razón promedio cuando $h \to 0$, es decir, dy/dx.

Según la Definición (3.19) (ii), si la variable x cambia, entonces y cambia a razón de dy/dx unidades por unidad de cambio de x. Por ejemplo, supongamos que un gas está encerrado en un globo esférico. Si el gas se calienta o se enfría pero la presión se mantiene constante, entonces el globo se dilata o se contrae y su volumen V es una función de la temperatura T. La derivada dV/dT es la tasa de variación (o razón de cambio) del volumen con respecto a la temperatura.

EJEMPLO 4 La corriente I (en amperes, A) en un circuito eléctrico está dada por $I = 100/R$, donde R es la resistencia (en ohms, Ω). Calcular la tasa de cambio o variación de I con respecto a R cuando la resistencia es 20 Ω.

Solución Escribiendo $I = 100R^{-1}$ y aplicando la Regla de la Potencia (3.10)

$$\frac{dI}{dR} = 100(-1)R^{-2} = -\frac{100}{R^2}.$$

Sustituyendo R por 20,

$$\frac{dI}{dR} = -\frac{100}{400} = -\frac{1}{4}.$$

Entonces, cuando $R = 20$, al aumentar R, I disminuye a razón de 0.25 amperes por ohm (A/Ω). •

El cálculo se ha convertido en un instrumento importante para resolver algunos problemas que surgen en la economía. Si para describir una cierta cantidad económica se usa una función f, entonces, se emplea el adjetivo *marginal* para hacer referencia a la derivada f'.

Sea x el número de unidades de algún bien de consumo. Los economistas usan frecuentemente las funciones C, c, R y P definidas como sigue:

Función de costo: $C(x)$ = Costo de producción de x unidades.

Función de costo medio: $c(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ = Costo medio de producción de una unidad.

Función de ingreso: $R(x)$ = Percepción por la venta de x unidades.

Función de utilidad: $P(x) = R(x) - C(x)$ = Utilidad (o ganancia) por la venta de x unidades.

Para utilizar el cálculo, se supone que x es un número real, aunque en general esta variable toma sólo valores enteros. Se supone siempre que $x \geq 0$, ya que la producción de un número negativo de unidades no tiene sentido en la práctica.

EJEMPLO 5 Un fabricante de grabadoras portátiles tiene un costo fijo mensual de \$10 000 (dólares), un costo de producción de \$12 por unidad y un precio de venta de \$20 por unidad.

(a) Calcular $C(x)$, $c(x)$, $R(x)$ y $P(x)$.

(b) Determinar los valores de las funciones en la parte (a) para $x = 1000$.

(c) ¿Cuántas unidades deben fabricarse para no salir perdiendo?

Solución

(a) El costo de producción de x unidades es $12x$. Como hay además un costo fijo mensual de \$10 000, el costo mensual total cuando se fabrican x unidades es

$$C(x) = 12x + 10\,000$$

En consecuencia, $c(x) = \dfrac{C(x)}{x} = 12 + \dfrac{10\,000}{x}$.

Vemos también que

$$R(x) = 20x$$

y

$$P(x) = R(x) - C(x) = 8x - 10\,000.$$

(b) Sustituyendo $x = 1000$ en la parte (a),

$C(1000) = 22\,000$ (costo de fabricación de 1000 unidades)
$c(1000) = 22$ (costo medio de fabricación por unidad)

$R(1000) = 20\,000$ (ingreso total por la venta de 1000 unidades)
$P(1000) = -2000$ (utilidad en la fabricación y venta de 1000 unidades)

Nótese que el fabricante tendría una pérdida de \$2000 por mes si se fabricaran y vendieran solamente 1000 unidades.

(c) Para que no haya pérdida, la ganancia mínima debe ser cero, es decir, $8x - 10\,000 = 0$. Esto da

$$8x = 10\,000 \quad \text{o bien} \quad x = 1500.$$

Por lo tanto, para el punto de equilibrio (no salir perdiendo) es necesario producir y vender 1500 unidades al mes. •

Las derivadas C', c', R' y P' se llaman **función de costo marginal, función de costo medio marginal, función de ingreso marginal** y **función de utilidad marginal**, respectivamente. El número $C'(x)$ es el **costo marginal** asociado a la producción de x unidades. Si se interpreta la derivada como la tasa de variación o de cambio, se dice entonces que el costo varía con respecto a la cantidad de unidades producidas x a razón de $C'(x)$ unidades monetarias por unidad de producción. Pueden hacerse afirmaciones semejantes para $c'(x)$, $R'(x)$ y $P'(x)$.

Si C es la función de costo y n es un entero positivo entonces, por la Definición (3.1),

$$C'(n) = \lim_{h \to 0} \frac{C(n+h) - C(n)}{h}.$$

Por lo tanto, si h es pequeño entonces

$$C'(n) \approx \frac{C(n+h) - C(n)}{h}.$$

Cuando la cantidad n de unidades producidas es grande, los economistas suelen tomar $h = 1$ en la fórmula anterior y estimar el costo marginal por

$$C'(n) \approx C(n+1) - C(n).$$

En este contexto, *el costo marginal asociado a la producción de n unidades es* (*aproximadamente*) *igual al costo de producir una unidad más.*

Algunas empresas consideran que el costo $C(x)$ de producir x unidades de un bien de consumo está dado por una fórmula como ésta:

$$C(x) = a + bx + dx^2 + kx^3.$$

La constante a representa un costo fijo por conceptos como alquiler, electricidad y calefacción, que son independientes del número de unidades producidas. Si el costo de producir una unidad fuera b y no hubiese otros factores implícitos, entonces el segundo término bx en la fórmula representaría el costo de producción de x unidades. Cuando x es muy grande, entonces los términos dx^2 y kx^3 pueden afectar significativamente los costos de producción.

EJEMPLO 6 Una fábrica de productos electrónicos calcula que el costo de producir x componentes para juguetes de tal tipo está dado por

$$C(x) = 200 + 0.05x + 0.0001x^2$$

(a) Calcular el costo, el costo medio y el costo marginal por la producción de 500 unidades, de 1000 unidades y de 5000 unidades.

(b) Comparar el costo marginal por la producción de 1000 unidades, con el costo de producir la milésimo primera (o 1001-ésima) unidad.

Solución

(a) El costo medio de producir x componentes es

$$c(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{200}{x} + 0.05 + 0.0001x$$

El costo marginal es

$$C'(x) = 0.05 + 0.0002x.$$

Se deja al lector el trabajo de verificar los valores de la tabla siguiente en la que se han desechado los milésimos de unidad monetaria.

Unidades x	Costo $C(x)$	Costo medio $c(x) = \frac{C(x)}{x}$	Costo marginal $C'(x)$
500	250.00	0.50	0.15
1000	350.00	0.35	0.25
5000	2950.00	0.59	1.05

(b) Usando la función de costo,

$$C(1001) = 200 + 0.05(1001) + (0.0001)(1000)^2 = 350.25$$

Por lo tanto, el costo de producir la milésimo primera unidad es

$$C(1001) - C(1000) = 350.25 - 350.00 = 0.25$$

que es igual al costo marginal $C'(1000)$. •

Las empresas deben tener en cuenta muchos factores para determinar el precio de venta de cada producto. Además del costo de producción y la ganancia deseada, la fábrica debe considerar el comportamiento de la demanda con respecto a los incrementos de precio. Para algunos productos la demanda es constante y los cambios de precio tienen poco efecto en las ventas. Un aumento de precio en los artículos que no son de primera necesidad normalmente produce una disminución en la cantidad de unidades

vendidas. Una compañía puede conocer por experiencia el precio por unidad $p(x)$ que induce una venta de x unidades; p se llama **función de demanda** para el producto en cuestión y se dice que $p(x)$ es el precio por unidad cuando la **demanda** es de x unidades. El ingreso total, o percepción, es el número de unidades vendidas multiplicado por el precio por unidad, es decir, $x \cdot p(x)$. Por lo tanto,

$$R(x) = xp(x).$$

La derivada p' se llama **función de demanda marginal**. Más adelante se darán algunos ejemplos de funciones de demanda.

EJERCICIOS 3.3

1. Un globo esférico se infla y su radio (en centímetros) a los t minutos está dado por $r(t) = 3\sqrt[3]{t}$, donde $0 \leq t \leq 10$. Calcule la razón de cambio con respecto a t en $t = 8$ de las siguientes cantidades.

(a) $r(t)$ (*Sugerencia:* Véase el Ejemplo 4 de la Sección 3.1.)

(b) El volumen del globo.

(c) El área de la superficie del globo. (*Sugerencia:* Usar la Regla del Producto.)

2. El volumen V (en pie³) de una pequeña represa durante la época de lluvias está dado por $V = 5000(t + 1)^2$, donde t se mide en meses y $0 \leq t \leq 3$. La tasa de cambio del volumen con respecto al tiempo es el *flujo* instantáneo hacia la represa. Calcule el flujo en los tiempos $t = 0$ y $t = 2$. ¿Cuál es el valor del flujo cuando el volumen es de 11 250 pie³?

3. Suponga que el pulso de un individuo (en latidos/minuto) a los t segundos de haber comenzado a correr, está dado por $P(t) = 56 + 2t^2 - t$, para $0 \leq t \leq 7$. Calcule la tasa de cambio de $P(t)$ con respecto a t en (a) $t = 2$, (b) $t = 4$ y (c) $t = 6$.

4. La temperatura T (en °C) de una solución al tiempo t (en minutos) está dada por $T(t) = 10 + 4t + [3/(t + 1)]$ para $1 \leq t \leq 10$. Calcule la tasa de variación o cambio de $T(t)$ con respecto a t en (a) $t = 2$, (b) $t = 5$ y (c) $t = 9$.

5. Un piedra se deja caer a un estanque y produce ondas de agua que forman círculos concéntricos. El radio de una onda es de $40t$ centímetros a los t segundos. Calcule la tasa de cambio con respecto a t del área del círculo en (a) $t = 1$, (b) $t = 2$ y (c) $t = 3$.

6. La ley de Boyle para los gases dice que $pv = c$ donde p es la presión, v el volumen y c una constante. Suponga que al tiempo t (en minutos) la presión es $20 + 2t$ cm/Hg para $0 \leq t \leq 10$, y que el volumen en $t = 0$ es de 60 cm³. Determine la razón de cambio del volumen con respecto a t en $t = 5$.

7. Una población de moscas crece en un recipiente grande. El número de moscas P (en cientos) a las t semanas está dado por $P = 12t^2 - t^4 + 5$. ¿Cuándo deja de crecer la población? ¿En qué intervalos de tiempo es positiva o negativa la tasa de crecimiento de la población?

8. Cuando se calienta un frasco que contiene 10 moles de un gas A, la velocidad de las moléculas del gas aumenta y se forma un segundo gas B. Cuando chocan dos moléculas del gas A, se originan dos moléculas del gas B. El número y de moles (mol) del gas B a los t minutos está dado por $y = 10t/(t + 4)$. Evalúe la rapidez de la reacción (en mol/min) cuando el número de moles del gas A es igual al número de moles del gas B.

Ejercicios 9-14: Encuentre la velocidad y la aceleración al tiempo t correspondientes a las funciones de posición s de un punto en movimiento rectilíneo, y describa el movimiento del punto durante el intervalo de tiempo indicado. Ilustre el fenómeno con un diagrama como el de la Figura 3.10.

9. $s(t) = 3t^2 - 12t + 1$, $[0, 5]$

10. $s(t) = t^2 + 3t - 6$, $[-2, 2]$

11. $s(t) = t^3 - 9t + 1$, $[-3, 3]$

12. $s(t) = 24 + 6t - t^3$, $[-2, 3]$

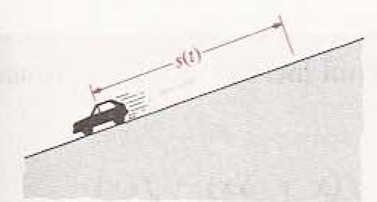
13. $s(t) = 2t^4 - 6t^2$, $[-2, 2]$

14. $s(t) = 2t^3 - 6t^5$, $[-1, 1]$

15. Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 144 pie/s. Su altura sobre el suelo $s(t)$ (en pies) a los t segundos (s) está dada por $s(t) = 144t - 16t^2$. ¿Cuál es la velocidad y cuál la aceleración a los t segundos? ¿cuáles son a los 3 s? ¿Cuál es la altura máxima? ¿Cuándo llega al suelo?

16. Un automóvil baja por un plano inclinado (ver la figura). El número de pies $s(t)$ recorridos a los t segundos está dado por $s(t) = 5t^2 + 2$. ¿Cuál es la velocidad en $t = 1$ s? ¿En $t = 2$ s? ¿Cuándo alcanza una velocidad de 28 pie/s?


EJERCICIO 16



17. La iluminación producida por una fuente de luz es directamente proporcional a la intensidad de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia s a la citada fuente. A una distancia de 2 pie de una hoguera, el luxómetro de un fotógrafo registra 120 unidades. El fotógrafo se aleja poco a poco de la hoguera. Calcule la tasa de cambio de la lectura del luxómetro con respecto a s cuando está a 20 pie de la hoguera.

18. Demuestre que la tasa de cambio del volumen de una esfera con respecto al radio es igual al área de la superficie.

19. Demuestre que la tasa de cambio del radio de una circunferencia con respecto a su perímetro es independiente de su tamaño.

20. La relación entre la temperatura F en la escala Fahrenheit y la temperatura C en la escala Celsius está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. ¿Cuál es la razón de cambio de F con respecto a C?

21. La resistencia eléctrica R de un alambre de cobre de longitud constante es inversamente proporcional al cuadrado de su diámetro d. ¿Cuál es la tasa de cambio o variación de R con respecto a d?

22. En la óptica se utiliza la ecuación de las lentes $1/f = (1/p) + (1/q)$, donde f es la distancia focal de una lente convexa y p y q son las distancias de la lente al objeto y a la imagen respectivamente. (Véase la figura del Ejercicio 53 de la Sección 2.4.) Encuentre una fórmula general para la tasa de cambio de q con respecto a p cuando f se mantiene fija.

Ejercicios 23-26: C es la función de costo de un producto. (a) Calcule el costo de producción de 100 unidades, y (b) encuentre las funciones de costo medio y marginal y obtenga sus valores en $x = 100$.

23. $C(x) = 800 + 0.04x + 0.0002x^2$

24. $C(x) = 6400 + 6.5x + 0.003x^2$

25. $C(x) = 250 + 100x + 0.001x^3$

26. $C(x) = 200 + (100/x) + (x/100)$

27. Un fabricante de motores pequeños calcula que el costo de producción de x unidades al día está dado por $C(x) = 100 + 50x + (100/x)$. Compare el costo marginal de producir 5 motores con el costo de la producción del sexto motor.

28. Una compañía lleva a cabo una serie de pruebas piloto para la producción de un nuevo solvente industrial, y encuentra que el costo de producir x litros para cada prueba está dado por $C(x) = 3 + x + (10/x)$. Compare el costo marginal de producir 10 litros con el costo de producir el undécimo litro.

3.4 INCREMENTOS Y DIFERENCIALES

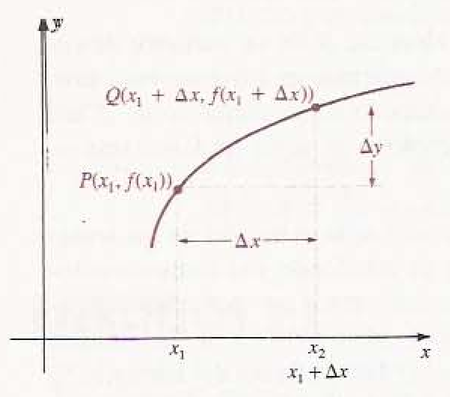
Consideremos la ecuación $y = f(x)$ en donde f es una función. En muchas aplicaciones la variable independiente x puede cambiar ligeramente y es necesario encontrar el cambio correspondiente de la variable dependiente y. Un cambio en x se denota frecuentemente por el símbolo Δx (que se lee "delta x"). Por ejemplo, si x varía de x_1 a x_2, entonces

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

El número Δx es el **incremento** de x. Nótese que $x_2 = x_1 + \Delta x$, es decir, el nuevo valor x_2 es igual al valor inicial x_1 más el incremento Δx. El símbolo Δy se usa para denotar el cambio en la variable dependiente y que corresponde a Δx. Entonces

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1).$$

FIGURA 3.12



En la Figura 3.12 se ilustran gráficamente los incrementos Δx y Δy.

En ocasiones se utiliza x para representar el valor inicial de la variable dependiente. En ese caso, para indicar un cambio (pequeño) de esta variable, se dice que *x tiene un incremento Δx*. Con esto la definición de Δy adquiere la siguiente forma.

DEFINICIÓN

Si $y = f(x)$ y x tiene un incremento Δx, entonces el **incremento Δy de y** es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

EJEMPLO 1 Sea $y = 3x^2 - 5$.

(a) Calcular el incremento Δy correspondiente a un incremento Δx de x.

(b) Calcular Δy cuando x cambia de 2 a 2.1.

Solución

(a) Sea $f(x) = 3x^2 - 5$. Aplicando la Definición (3.20),

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x)\\ &= [3(x + \Delta x)^2 - 5] - [3x^2 - 5]\\ &= [3(x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2) - 5] - [3x^2 - 5]\\ &= 3x^2 + 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - 5 - 3x^2 + 5\\ &= 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2\end{aligned}$$

(b) Deseamos calcular Δy cuando $x = 2$ y $\Delta x = 0.1$ Sustituyendo en la fórmula para Δy,

$$\begin{aligned}\Delta y &= 6(2)(0.1) + 3(0.1)^2\\ &= 12(0.1) + 3(0.01) = 1.2 + 0.03 = 1.23\end{aligned}$$

Por lo tanto, el cambio de y es 1.23 cuando x varía de 2 a 2.1. También podemos calcular Δy directamente como sigue:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = f(2.1) - f(2)\\ &= [3(2.1)^2 - 5] - [3(2)^2 - 5] = 1.23 \quad \bullet\end{aligned}$$

La notación de incrementos puede usarse para definir la derivada de una función. Basta sustituir h por Δx en (3.4) y así:

(3.21)
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Esto puede expresarse: *La derivada de f es el límite de la razón del incremento Δy de la variable dependiente al incremento Δx de la variable independiente, cuando Δx tiende a cero*. En la Figura 3.12 puede verse que $\Delta y/\Delta x$ es la pendiente de la recta secante que pasa por P y Q. De (3.21) se advierte que si $f'(x)$ existe, entonces

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \quad \text{cuando } \Delta x \approx 0 \qquad \text{o bien} \qquad \Delta y \approx f'(x)\,\Delta x \quad \text{cuando } \Delta x \approx 0.$$

En la siguiente definición se da un nombre especial a $f'(x)\,\Delta x$.

DEFINICIÓN (3.22)

Sea $y = f(x)$, donde f es una función derivable, y sea Δx un incremento de x.

(i) La **diferencial** dx de la variable independiente x es $dx = \Delta x$.

(ii) La **diferencial** dy de la variable dependiente y es

$$dy = f'(x)\,\Delta x = f'(x)\,dx$$

En (3.22) (i) puede verse que la (variación) diferencial dx de la variable *independiente* x es igual a su incremento Δx. Sin embargo, esto no sucede con la variable *dependiente* y. Como puede verse en (ii) el valor de dy depende de x y de dx.

Si ambos lados de la ecuación $dy = f'(x)\,dx$ de la Definición (3.22) (ii) se dividen entre dx (suponiendo que $dx \neq 0$), se obtiene lo siguiente.

(3.23)
$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Por lo tanto, la derivada $f'(x)$ puede expresarse como el cociente de dos diferenciales. Esto justifica la notación dy/dx que se presentó en (3.6) para la derivada de $y = f(x)$ con respecto a x.

Los comentarios previos a la Definición (3.22) conducen a lo siguiente.

(3.24) Si $\Delta x \approx 0$, entonces $\Delta y \approx dy = f'(x)\,dx = (D_x y)\,dx$.

Por tanto, si $y = f(x)$, dy puede usarse como un valor aproximado del incremento exacto Δy de la variable dependiente correspondiente a un incremento pequeño Δx de

x. Esta observación es útil para las aplicaciones en que se requiere una estimación de la variación de y.

EJEMPLO 2 Sea $y = 3x^2 - 5$. Utilizar dy para estimar Δy cuando x cambia de 2 a 2.1.

Solución Sea $f(x) = 3x^2 - 5$. En el Ejemplo 1 vimos que $\Delta y = 1.23$. Usando la Definición (3.22),

$$dy = f'(x)\,dx = 6x\,dx.$$

En este ejemplo, $x = 2$, $\Delta x = dx = 0.1$, y

$$dy = (6)(2)(0.1) = 1.2$$

Obsérvese que el valor 1.2 coincide con el valor exacto hasta la primera cifra decimal. •

EJEMPLO 3 Sea $y = x^3$ y Δx un incremento de x. Calcular **(a)** Δy, **(b)** dy, **(c)** $\Delta y - dy$ y **(d)** el valor de $\Delta y - dy$ para $x = 1$ y $\Delta x = 0.02$.

Solución

(a) Usando (3.20) con $f(x) = x^3$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3.$$

Aplicando el Teorema del Binomio (3.9) con $n = 3$,

$$\begin{aligned}\Delta y &= [x^3 + 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3] - x^3\\ &= 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\end{aligned}$$

(b) Por la Definición (3.22) (ii),

$$dy = f'(x)\,dx = 3x^2\,dx = 3x^2(\Delta x)$$

(c) De las partes (a) y (b),

$$\begin{aligned}\Delta y - dy &= [3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3] - 3x^2(\Delta x)\\ &= 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\end{aligned}$$

(d) Sustituyendo $x = 1$ y $\Delta x = 0.02$ en la parte (c),

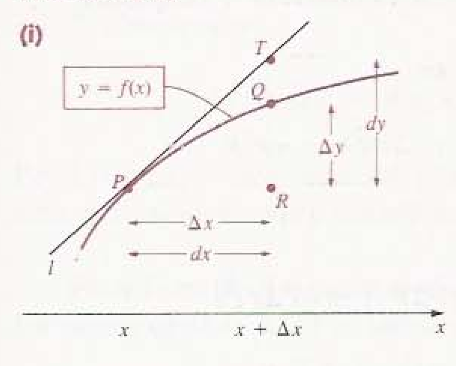
$$\begin{aligned}\Delta y - dy &= 3(1)(0.02)^2 + (0.02)^3\\ &= 3(0.0004) + (0.000008) = 0.001208 \approx 0.001\end{aligned}$$

Esto muestra que si dy se usa para estimar Δy cuando x cambia de 1 a 1.02, el error que se comete es de 0.001, aproximadamente. •

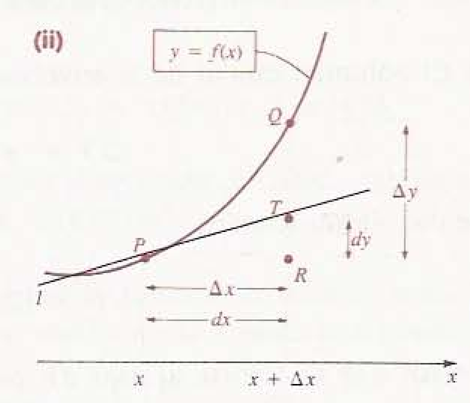
Las gráficas en la Figura 3.13 ilustran la interpretación geométrica de dx y dy en relación con la recta tangente l en el punto P. Se han representado Δx y Δy suponien-

FIGURA 3.13

(i)



(ii)



do que son positivos, sin embargo, pueden tomar valores negativos. En el triángulo PRT puede apreciarse que la pendiente $f'(x)$ de la recta tangente l es la razón $RT/\Delta x$, donde RT es la longitud del segmento que une R y T. Por lo tanto,

$$\frac{RT}{\Delta x} = f'(x) \qquad \text{o bien} \qquad RT = f'(x)\,\Delta x = dy.$$

Cuando los incrementos son negativos se obtiene un resultado análogo. En general, si x tiene un incremento Δx, entonces dy es lo que la *recta tangente* en P sube (o baja) cuando la variable independiente cambia de x a $x + \Delta x$. Esto es distinto de la cantidad Δy que es lo que la *gráfica* sube (o baja) entre P y Q. Esta interpretación geométrica también muestra que $dy \approx \Delta y$ cuando Δx es pequeño.

El ejemplo siguiente muestra cómo se pueden usar las diferenciales para obtener fórmulas de aproximación.

EJEMPLO 4

(a) Usar diferenciales para llegar a una fórmula que dé el valor aproximado del volumen de una envolvente cilíndrica delgada de altura h, radio interior r y espesor T.

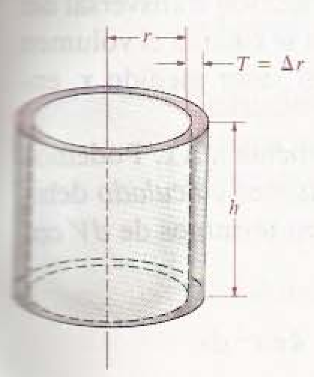
(b) ¿Cuál es el error que se comete al usar esta fórmula?

Solución

(a) En la Figura 3.14 se ilustra la cubierta cilíndrica de espesor T denotado por Δr. Hay que calcular el volumen comprendido entre el cilindro *interior* de radio r y el cilindro *exterior* de radio $r + \Delta r$. El volumen V del cilindro interno es

$$V = \pi r^2 h.$$


FIGURA 3.14



Si r se incrementa en Δr, entonces el volumen de la envolvente es el cambio ΔV de V. Considerando V como función de r y aplicando (3.24),

$$\Delta V \approx dV = (D_r V)\,dr = (2\pi rh)\,dr$$

con $dr = \Delta r$, ya que r es la variable independiente. Entonces

$$\Delta V \approx (2\pi rh)\,dr = (2\pi rh)T$$

es una fórmula aproximada para el volumen del cascarón cilíndrico. En palabras,

$$\text{Volumen} \approx (\text{Área de la cara cilíndrica interior}) \times (\text{Espesor}).$$

(b) El volumen exacto de la envolvente es

$$\Delta V = \pi(r + \Delta r)^2 h - \pi r^2 h$$

que da, simplificando,

$$\Delta V = (2\pi rh)\Delta r + \pi h(\Delta r)^2.$$

El error que se comete al usar dV para estimar ΔV es

$$\Delta V - dV = \pi h(\Delta r)^2.$$

Esto muestra que la aproximación dV es muy precisa cuando Δr es pequeño en comparación con h. •

El siguiente ejemplo ilustra el uso de las diferenciales para evaluar los errores de cálculo provenientes de errores de medición. Como se indica en la solución, *es importante considerar primero las fórmulas generales* y no sustituir las variables por sus valores específicos sino hasta los últimos pasos de la solución.

EJEMPLO 5 El radio de un globo esférico mide 30 cm y el error máximo en la medición es de 0.15 cm. Estimar el máximo error que se comete al calcular el volumen de la esfera.

Solución Consideramos primero la fórmula *general* que relaciona el radio con el volumen. Definimos

$$x = \text{valor medido del radio}$$

y

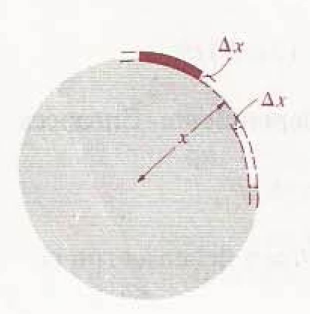
$$dx = \Delta x = \text{error máximo en } x.$$

Suponiendo que Δx es positivo, tenemos que

$$x - \Delta x \leq \text{radio exacto} \leq x + \Delta x.$$

Si Δx es negativo, podemos usar $|\Delta x|$ en vez de Δx. En la Figura 3.15 se muestra una parte de la sección transversal del globo que indica el posible error Δx. Si se calcula el volumen V de la envolvente cilíndrica usando el valor medido x, entonces $V = \frac{4}{3}\pi x^3$.

FIGURA 3.15



Sea ΔV el cambio en V correspondiente a Δx. Podemos interpretar ΔV como *el error en el volumen calculado* debido al error Δx. Podemos estimar ΔV en términos de dV como sigue:

$$\Delta V \approx dV = (D_x V)\,dx = 4\pi x^2\,dx.$$

Finalmente, sustituimos los valores específicos de x y dx. Con $x = 30$ y $\Delta x = dx = \pm 0.15$ obtenemos

$$dV = 4\pi(30^2)(\pm 0.15) = \pm(540)\pi \approx \pm 1696.$$

Por lo tanto, el error máximo posible en el volumen calculado debido al error de medición del radio es, aproximadamente, $\pm 1696\ \text{cm}^3$. •

En el Ejemplo 5 el radio medido del globo fue de 30 cm con error máximo de 0.15 cm. La razón de 0.15 a 30 se llama *error medio* en la medición del radio. Por tanto

$$\text{Error medio} = \frac{0.15}{30} = 0.005.$$

Este número significa que el error en la medición del radio es, *en promedio*, 0.005 cm por cm. El *error porcentual* se define como el error medio multiplicado por 100%. En este ejemplo,

$$\text{Error porcentual} = (0.005)(100\%) = 0.5\%.$$

A continuación se enuncia la definición general de estos conceptos.

DEFINICIÓN (3.25)

Sea x una medida con un error máximo Δx. Por definición,

(i) **Error medio** $= \dfrac{\Delta x}{x}$.

(ii) **Error porcentual** = (Error medio) × (100%).

En términos de diferenciales, si x representa una medida con un error posible dx, entonces el error medio es $(dx)/x$. Si dx es una *aproximación* al error en x entonces, por supuesto, $(dx)/x$ es una *aproximación* al error medio. El siguiente ejemplo ilustra estos comentarios.

EJEMPLO 6 El radio de un globo mide 30 cm con un error máximo en la medición de 0.15 cm. Estimar el error medio y el error porcentual para el valor calculado del volumen.

Solución Este ejemplo es continuación del Ejemplo 5, donde encontramos que si el error máximo en la medición del radio es 0.15 cm, entonces el error máximo ΔV en el volumen calculado V del globo puede aproximarse por

$$dV = \pm(540)\pi \approx \pm 1696\ \text{cm}^3.$$

El volumen calculado es

$$V = \tfrac{4}{3}\ \pi(30)^3 = 36\,000\pi\ \text{cm}^3.$$

Aplicando la Definición (3.25) a la variable V:

$$\text{Error medio} = \frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{\pm(540)\pi}{36\,000\ \pi} \approx \pm 0.015.$$

$$\text{Error porcentual} \approx \pm(0.015)(100\%) = \pm 1.5\%.$$

Por lo tanto, *en promedio*, hay un error de $\pm 0.015\ \text{cm}^3$ por cm^3 del volumen calculado. A continuación del Ejemplo 5 encontramos que el error porcentual para el radio es 0.5%. Nótese que esto da un error porcentual de 1.5% para el volumen. •

EJERCICIOS 3.4

Ejercicios 1-4: (a) Utilice la Definición (3.20) para encontrar una fórmula general para Δy. (b) Calcule el cambio en y correspondiente a los valores x y Δx, usando Δy.

1. $y = 2x^2 - 4x + 5,\ x = 2,\ \Delta x = -0.2$

2. $y = x^3 - 4,\ x = -1,\ \Delta x = 0.1$

3. $y = 1/x^2,\ x = 3,\ \Delta x = 0.3$

4. $y = 1/(2 + x),\ x = 0,\ \Delta x = -0.03$

Ejercicios 5-12: Determine (a) Δy, (b) dy y (c) $dy - \Delta y$.

5. $y = 3x^2 + 5x - 2$ **6.** $y = 4 - 7x - 2x^2$

7. $y = 1/x$ **8.** $y = 7x + 12$

9. $y = 4 - 9x$ **10.** $y = 8$

11. $y = x^4$ **12.** $y = x^{-2}$

Ejercicios 13-14: Use diferenciales para estimar el cambio en $f(x)$ cuando x varía de a a b.

13. $f(x) = 4x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 5;\ a = 1,\ b = 1.03$

14. $f(x) = -3x^3 + 8x - 7;\ a = 4,\ b = 3.96$

15. Sean $f(z) = z^3 - 3z^2 + 2z - 7$ y $w = f(z)$. Encuentre dw. Use dw para estimar el incremento de w cuando z varía de 4 a 3.95.

16. Sean $F(t) = 1/(2 - t^2)$ y $s = F(t)$. Determine ds y utilice este valor para estimar el incremento de s cuando t varía de 1 a 1.02.

17. El radio de la tapa circular de un pozo de alcantarilla es de 40 cm aproximadamente, con un error en la medición de 0.15 cm. Utilizando diferenciales, estime el error máximo en el cálculo del área de un lado de la tapa. Calcule el error medio y el error porcentual.

18. El lado de una baldosa cuadrada mide 30 cm con un error de medición de 0.15 cm. Use diferenciales para estimar el error máximo en el cálculo del área. Calcule el error medio y el error porcentual.

19. Emplee diferenciales para estimar el incremento en volumen de un cubo cuando sus lados cambian de 10 a 10.1 cm. ¿Cuál es el incremento exacto del volumen?

20. Un globo esférico se infla con gas. Use diferenciales para estimar el incremento del área de la superficie del globo cuando el diámetro varía de 60 cm a 60.6 cm.

21. Un lado de una casa tiene la forma de un cuadrado coronado por un triángulo equilátero. La base mide 48 pie con un error máximo en la medición de 1 pulg. Calcule el área del lado y use diferenciales para estimar el error máximo cometido en el cálculo. Evalúe el error medio y el error porcentual.

22. Los pequeños errores en la medición de las dimensiones de grandes recipientes tienen un efecto importante en el cálculo de sus volúmenes. Un silo tiene la forma de un cilindro circular recto coronado por una semiesfera (véase la figura). La altura del cilindro es exactamente de 50 pie. Suponga que la circunferencia de la base mide 30 pie con un error máximo en la medición de 6 pulg. Calcule el volumen del silo a partir de estas medidas y use diferenciales para estimar el error máximo en el cálculo. Determine el error medio y el error porcentual.

EJERCICIO 22



23. La arena que se escapa de un recipiente va formando un montículo cónico cuya altura siempre es igual a su radio. *Use diferenciales para estimar* el incremento del radio correspondiente a un aumento de 2 cm^3 en el volumen del montículo, cuando el radio mide 10 cm.

24. **Use el método ilustrado en el Ejemplo 4 de esta sección para encontrar fórmulas aproximadas del volumen de una envolvente sólida delgada cuya forma superficial es (a) esférica, (b) cúbica.**

25. La ley de gravitación de Newton dice que la fuerza de atracción entre dos partículas con masas m_1 y m_2 está dada por $F = gm_1m_2/s^2$, donde g es una constante y s es la distancia entre las partículas. Use diferenciales para estimar el incremento en s que se requiere para aumentar F en un 10% cuando $s = 20$ cm.

26. La ley de Boyle establece que la presión p y el volumen v de un gas encerrado están relacionados por la fórmula $pv = c$, donde c es una constante; o, equivalentemente, por $p = c/v$, suponiendo $v \neq 0$. Demuestre que dp y dv están relacionados por la fórmula $p\,dv + v\,dp = 0$.

27. Haga uso de diferenciales para estimar $(0.98)^4$. (*Sugerencia:* Tome $y = f(x) = x^4$ y considere $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$, con $x = 1$ y $\Delta x = -0.02$.) ¿Cuál es el valor exacto de $(0.98)^4$?

28. Emplee diferenciales para estimar el valor de

$$N = (2.01)^4 - 3(2.01)^3 + 4(2.01)^2 - 5.$$

¿Cuál es el valor exacto de N?

29. El área A de un cuadrado de lado s está dada por $A = s^2$. Suponga que s tiene un incremento Δs. Ilustre geométricamente dA y $\Delta A - dA$.

30. El volumen V de un cubo de lado x está dado por $V = x^3$. Suponga que x tiene un incremento Δx. Ilustre geométricamente dV y $\Delta V - dV$.

31. La obstrucción de las arteriolas es una de las causas de hipertensión sanguínea. Se ha comprobado experimentalmente que cuando la sangre fluye por una arteriola de longitud dada, la diferencia de presión en los dos extremos de la arteriola es inversamente proporcional a la cuarta potencia del radio. Suponga que el radio de una arteriola disminuye en 10%. Use diferenciales para calcular el cambio porcentual en la diferencia de presión.

32. La resistencia eléctrica R de un conductor es directamente proporcional a su longitud e inversamente proporcional al cuadrado de su diámetro. Suponiendo que la longitud es constante, ¿con qué precisión debe medirse el diámetro (en términos del error porcentual) para mantener el error porcentual en el valor de R entre -3% y 3%?

3.5 LA REGLA DE LA CADENA

Las reglas de derivación presentadas en las secciones anteriores se pueden usar solamente para sumas, restas, productos y cocientes de expresiones de la forma x^n donde n es un entero. Hasta ahora no se ha presentado ninguna regla que pueda aplicarse *directamente* a una expresión como $(x^2 + 1)^3$. Es claro que

$$D_x\,(x^2 + 1)^3 \neq 3(x^2 + 1)^2$$

pues cambiando la forma de la expresión puede escribirse

$$y = (x^2 + 1)^3 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$$

y entonces

$$\begin{aligned} D_x y &= 6x^5 + 12x^3 + 6x \\ &= 6x(x^4 + 2x^2 + 1) \\ &= 6x(x^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $$D_x(x^2 + 1)^3 = 6x(x^2 + 1)^2.$$

Estos desarrollos pueden llegar a ser muy complicados para potencias mayores, como por ejemplo $(x^2 + 1)^{10}$. Por esto es conveniente tener métodos más sencillos para calcular la derivada. El que se usa en este caso parte de expresar y como una función *compuesta* de x. Recordemos que si f y g son funciones tales que

$$y = f(u) \quad \text{y} \quad u = g(x),$$

y si $g(x)$ está en el dominio de f entonces puede escribirse

$$y = f(u) = f(g(x)),$$

es decir, y es una función de x. Esta última es la función compuesta $f \circ g$ definida en la Sección 1.5. Nótese que $y = (x^2 + 1)^3$ puede expresarse de esta manera definiendo

$$y = u^3 \quad \text{y} \quad u = x^2 + 1.$$

Si se pudiera encontrar una regla general para derivar $f(g(x))$, entonces se podría aplicar a $y = (x^2 + 1)^3$ como un caso especial y también a cualquier expresión de la forma $y = [f(x)]^n$, donde n es un entero.

Para dar una idea del tipo de regla esperada, regresemos a las ecuaciones

$$y = f(u) \quad \text{y} \quad u = g(x).$$

El objetivo es encontrar una fórmula para la derivada dy/dx de la función compuesta dada por $y = f(g(x))$. Si f y g son derivables, entonces, usando la notación de diferenciales,

$$\frac{dy}{du} = f'(u) \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx} = g'(x).$$

Considerando el producto

$$\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

y tratando las derivadas como cocientes de diferenciales, *se llega* a la siguiente regla:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'(u)g'(x).$$

Nótese que ésta proporciona la derivada correcta de $y = (x^2 + 1)^3$, pues escribiendo

$$y = u^3 \quad \text{y} \quad u = x^2 + 1$$

y usando la regla, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (3u^2)(2x) = 6xu^2 = 6x(x^2 + 1)^2.$$

Aunque no se ha *demostrado* la citada regla, se ha planteado el siguiente teorema, en el que se supone que las variables se eligen de manera que la función compuesta $f \circ g$ está definida y que si g tiene derivada en x entonces f tiene derivada en $g(x)$.

REGLA DE LA CADENA (3.26)

Si $y = f(u)$, $u = g(x)$, y las derivadas $\dfrac{dy}{du}$ y $\dfrac{du}{dx}$ existen ambas, entonces la función compuesta definida por $y = f(g(x))$ tiene una derivada dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Demostración Parcial Sean x y Δx tales que tanto x como $x + \Delta x$ estén en el dominio de la función compuesta. Como $y = f(g(x))$, el incremento de y correspondiente está dado por

$$\Delta y = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x)).$$

Si la función compuesta tiene una derivada en x, entonces por (3.23),

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Considerando $u = g(x)$, sea Δu el incremento de u correspondiente a Δx, es decir,

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x).$$

Puesto que

$$g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta u = u + \Delta u$$

la fórmula $\Delta y = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))$ puede expresarse como

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u).$$

Si $y = f(u)$ es derivable en u entonces

$$\frac{dy}{du} = f'(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}.$$

Análogamente, si $u = g(x)$ es derivable en x entonces

$$\frac{du}{dx} = g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Supongamos que existe un intervalo abierto I que contiene a x tal que siempre que $x + \Delta x$ está en I y $\Delta x \neq 0$, entonces $\Delta x \neq 0$. En este caso puede escribirse

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

siempre y cuando el límite exista. Como g es derivable en x entonces es continua en x. Como $\Delta x \to 0$, entonces $g(x + \Delta x)$ tiende a $g(x)$ y por lo tanto $\Delta u \to 0$. Resulta que la fórmula del límite dada anteriormente se puede escribir

$$\frac{dy}{dx} = \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$
$$= \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

que es lo que se quería demostrar.

En la mayoría de las aplicaciones de la Regla de la Cadena, $u = g(x)$ tiene las propiedades utilizadas en el párrafo anterior. Si g no satisface esta propiedad, entonces todo el intervalo abierto que contiene a x contiene también a un número $x + \Delta x$, con $\Delta x \neq 0$, tal que $\Delta u = 0$. En este caso la demostración no es válida ya que Δu aparece en un denominador. Para tener una demostración que se aplique a funciones de este tipo es necesario desarrollar otros métodos. *En el Apéndice II se da una demostración completa de la Regla de la Cadena.* • •

EJEMPLO 1 Sea $y = (3x^2 - 7x + 1)^5$. Usar la Regla de la Cadena para encontrar dy/dx.

Solución Considerando

$$y = u^5 \quad \text{y} \quad u = 3x^2 - 7x + 1.$$

se expresa y como una función compuesta de x. Si se utiliza la Regla de la Cadena (3.26),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 5u^4(6x - 7)$$
$$= 5(3x^2 - 7x + 1)^4(6x - 7) \quad \bullet$$

Una de las aplicaciones principales de la regla mencionada es para desarrollar otras fórmulas de derivación. Como un primer ejemplo se demostrará una fórmula para la derivada de una potencia de una función.

REGLA DE LA POTENCIA PARA FUNCIONES (3.27)

Si g es una función derivable y n es un entero entonces

$$D_x\,[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}\,D_x\,[g(x)].$$

Demostración Si $y = u^n$ y $u = g(x)$, se tiene que $y = [g(x)]^n$. Por la Regla de la Cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\,D_x\,u = n[g(x)]^{n-1}\,D_x\,[g(x)].$$

Esto completa la demostración. • •

La siguiente forma equivalente para la Regla de la Potencia en el caso de Funciones es más fácil de recordar que (3.27).

REGLA DE LA POTENCIA (FORMA ALTERNA) (3.28)

$$D_x(u^n) = nu^{n-1}\, D_x u, \qquad \text{para } u = g(x)$$

Nótese que si $u = x$ entonces $D_x u = 1$, con lo que (3.28) se reduce a (3.10).

EJEMPLO 2 Encontrar $f'(x)$ para $f(x) = (x^5 - 4x + 8)^7$.

Solución Usando la Regla de la Potencia (3.28) con $u = x^5 - 4x + 8$ y $n = 7$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x(x^5 - 4x + 8)^7 = 7(x^5 - 4x + 8)^6\, D_x(x^5 - 4x + 8) \\ &= 7(x^5 - 4x + 8)^6(5x^4 - 4) \end{aligned}$$

•

EJEMPLO 3 Determinar $\dfrac{dy}{dx}$ para $y = \dfrac{1}{(4x^2 + 6x - 7)^3}$.

Solución Escribiendo $y = (4x^2 + 6x - 7)^{-3}$ y aplicando la Regla de la Potencia (3.28) con $u = 4x^2 + 6x - 7$ y $n = -3$,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= D_x(4x^2 + 6x - 7)^{-3} \\ &= -3(4x^2 + 6x - 7)^{-4}\, D_x(4x^2 + 6x - 7) \\ &= -3(4x^2 + 6x - 7)^{-4}(8x + 6) \\ &= \frac{-6(4x + 3)}{(4x^2 + 6x - 7)^4} \end{aligned}$$

•

EJEMPLO 4 Sea $F(z) = (2z + 5)^3(3z - 1)^4$. Encontrar $F'(z)$.

Solución Usando primero la Regla del Producto, después la Regla de la Potencia y factorizando el resultado,

$$\begin{aligned} F'(z) &= (2z + 5)^3\, D_z(3z - 1)^4 + (3z - 1)^4\, D_z(2z + 5)^3 \\ &= (2z + 5)^3 \cdot 4(3z - 1)^3(3) + (3z - 1)^4 \cdot 3(2z + 5)^2(2) \\ &= 6(2z + 5)^2(3z - 1)^3[2(2z + 5) + (3z - 1)] \\ &= 6(2z + 5)^2(3z - 1)^3(7z + 9) \end{aligned}$$

•

FIGURA 3.16

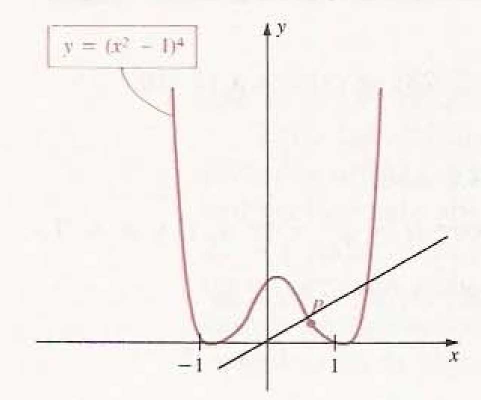
Sea f una función derivable. La **recta normal** a la gráfica de f en el punto $P(a,\ f(a))$ es la recta que pasa por P y es perpendicular a la recta tangente en el mismo punto, como se ilustra en la Figura 3.16. Si $f'(a) \neq 0$, entonces por el Teorema (1.19), la pendiente de la recta normal es $-1/\,f'(a)$. Si $f'(a) = 0$, entonces la recta tangente es horizontal y, en este caso, la recta normal es vertical y tiene por ecuación $x = a$.

EJEMPLO 5 Sea $f(x) = (x^2 - 1)^4$. Encontrar la pendiente de la recta normal a la gráfica de f en el punto $P(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$. Ilustrar esto con un croquis.

Solución Por la Regla de la Potencia,

$$f'(x) = 4(x^2 - 1)^3(2x) = 8x(x^2 - 1)^3.$$

FIGURA 3.17



La pendiente m de la recta tangente en P es

$$m = f'(\tfrac{1}{2}) = 8(\tfrac{1}{2})(-\tfrac{3}{4})^3 = -\tfrac{27}{16} \approx -1.7$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta normal es $-1/m = 16/27 \approx 0.6$.

La gráfica de f es simétrica con respecto al eje y, las abscisas de sus intersecciones con el eje x son ± 1, y la ordenada de la intersección con el eje y es 1. En la Figura 3.17 aparece un croquis de la gráfica de f y su recta normal en P. •

Si g es una función derivable y $y = g(x)$, entonces (3.28) también se puede expresar en cualquiera de las siguientes formas.

(3.29) $$D_x(y^n) = ny^{n-1}D_xy = ny^{n-1}y' = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$$

La variable dependiente y representa la expresión $g(x)$ y por lo tanto, al derivar y^n *es necesario* multiplicar ny^{n-1} por la derivada y'. En general, $D_xy^r \neq ry^{r-1}$. La Fórmula (3.29) será de gran utilidad en la siguiente sección para trabajar con las funciones implícitas.

EJERCICIOS 3.5

Ejercicios 1-26: Derive la función.

1. $f(x) = (x^2 - 3x + 8)^3$
2. $f(x) = (4x^3 + 2x^2 - x - 3)^2$
3. $g(x) = (8x - 7)^{-5}$
4. $k(x) = (5x^2 - 2x + 1)^{-3}$
5. $f(x) = \dfrac{x}{(x^2 - 1)^4}$
6. $g(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 1}{(2x + 3)^4}$
7. $f(x) = (8x^3 - 2x^2 + x - 7)^5$
8. $g(w) = (w^4 - 8w^2 + 15)^4$
9. $F(v) = (17v - 5)^{1000}$
10. $K(x) = (3x^2 - 5x + 7)^{-1}$
11. $s(t) = (4t^5 - 3t^3 + 2t)^{-2}$
12. $p(s) = 1/(8 - 5s + 7s^2)^{10}$
13. $N(x) = (6x - 7)^3(8x^2 + 9)^2$
14. $f(w) = (2w^2 - 3w + 1)(3w + 2)^4$
15. $g(z) = \left(z^2 - \dfrac{1}{z^2}\right)^6$
16. $S(t) = \left(\dfrac{3t + 4}{6t - 7}\right)^3$
17. $k(u) = \dfrac{(u^2 + 1)^3}{(4u - 5)^5}$

18. $g(x) = (3x - 8)^{-2}(7x^2 + 4)^{-3}$

19. $f(x) = \left(\dfrac{3x^2 - 5}{2x^2 + 7}\right)^2$ 20. $M(z) = \dfrac{9z^3 + 2z}{(6z + 1)^3}$

21. $G(s) = (s^{-4} + 3s^{-2} + 2)^{-6}$

22. $F(v) = (v^{-1} - 2v^{-2})^{-3}$

23. $h(x) = [(2x + 1)^{10} + 1]^{10}$

24. $f(t) = \left[\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^{-1} + 1\right]^{-1}$

25. $F(t) = 2t(2t + 1)^2(2t + 3)^3$

26. $N(x) = \dfrac{7x(x^2 + 1)^2}{(3x + 10)^4}$

Ejercicios 27-30: (a) Encuentre ecuaciones para la recta tangente y la recta normal en el punto P de la gráfica de la ecuación dada. (b) Determine los puntos de la gráfica en los que la recta tangente es horizontal.

27. $y = (4x^2 - 8x + 3)^4$; $P(2, 81)$

28. $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^5$; $P(1, 32)$

29. $y = (2x - 1)^{10}$; $P(1, 1)$

30. $y = (x^2 - 1)^7$; $P(0, -1)$

31. Sea $y = (x^4 - 3x^2 + 1)^{10}$. Encuentre dy y úsela para estimar el incremento de y cuando x varía de 1 a 1.01.

32. Sea $w = z^3(z - 1)^5$. Halle dw y úsela para estimar el incremento de w cuando z varía de 2 a 1.98.

33. Sean $w = f(z)$ y $z = g(s)$. (a) Exprese la fórmula de la Regla de la Cadena para dw/ds en términos de la notación con diferenciales. (b) Determine dw/ds para $w = z^3 - (2/z)$ y para $z = (s^2 + 1)^5$.

34. Sean $v = F(u)$ y $u = G(t)$. (a) Exprese la fórmula de la Regla de la Cadena para dv/dt en términos de la notación con diferenciales. (b) Encuentre dv/dt para $v = (u^4 + 2u^2 + 1)^3$ y $u = 4t^2$.

35. Si un cuerpo de masa m tiene velocidad v, entonces su *energía cinética* K está dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$. Suponiendo que v es una función del tiempo t, aplique la Regla de la Cadena para encontrar una fórmula para dK/dt.

36. Cuando un globo meteorológico se está inflando, su radio r es función del tiempo t. Sea V el volumen del globo. Aplique la Regla de la Cadena para obtener una fórmula para dV/dt.

37. Cuando se lanza un astronauta al espacio, el peso de su cuerpo disminuye hasta llegar a un estado de ingravedad (o ingravidez) total. El peso W de un astronauta de 150 libras (lb), a una altura de x km sobre el nivel del mar está dado por

$$W = 150\left[\frac{6400}{6400 + x}\right]^2.$$

¿A razón de cuántas libras por segundo (lb/s) pierde peso el astronauta si cuando $x = 1000$ km la astronave se va alejando a razón de 6 km/s?

38. La relación de longitud a peso del pez llamado hipogloso del Pacífico está descrita por la fórmula $W = 10.375L^3$, donde la longitud L está en metros y el peso W en kilogramos. Su tasa de crecimiento en longitud dL/dt está dada por $0.18(2 - L)$, para t medido en años.
(a) Encuentre una fórmula para la tasa de crecimiento en peso dW/dt en términos de L.
(b) Use la fórmula de la parte (a) para calcular la tasa de crecimiento en peso de un hipogloso de 20 kg.

39. Calcule $k(2)$ y $k'(2)$ suponiendo que $k(x) = f(g(x))$ y $f(2) = -4$, $g(2) = 2$, $f'(2) = 3$, $g'(2) = 5$.

40. Sean p, q y r funciones tales que $p(z) = q(r(z))$. Suponiendo que $r(3) = 3$, $q(3) = -2$, $r'(3) = 4$ y $q'(3) = 6$, calcule $p(3)$ y $p'(3)$.

41. Sea $f(t) = g(h(t))$. Suponiendo que $f(4) = 3$, $g(4) = 3$, $h(4) = 4$, $f'(4) = 2$ y $g'(4) = -5$, evalúe $h'(4)$.

42. Sea $u(x) = v(w(x))$. Considerando que $v(0) = -1$, $w(0) = 0$, $u(0) = -1$, $v'(0) = -3$ y $u'(0) = 2$, calcule $w'(0)$.

43. Consulte la Definición (1.21). Sea f derivable. Aplique la Regla de la Cadena para demostrar (a) que si f es par, por lo tanto f' es impar, y (b) que si f es impar, entonces f' es par. Dé ejemplos de (a) y (b) utilizando funciones polinomiales.

44. Sean $z = k(y)$, $y = f(u)$ y $u = g(x)$. Demuestre que según hipótesis restrictivas adecuadas

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Generalice este resultado a un número arbitrario de funciones.

3.6 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Dada una ecuación de la forma

$$y = 2x^2 - 3$$

se dice que *y es una función de x*, ya que

$$y = f(x) \quad \text{con} \quad f(x) = 2x^2 - 3.$$

La ecuación $\qquad 4x^2 - 2y = 6$

define la misma función f, pues al despejar y se obtiene

$$-2y = -4x^2 + 6 \quad \text{o bien} \quad y = 2x^2 - 3.$$

En el caso $4x^2 - 2y = 6$ se expresa que y (o bien f) es una **función implícita** de x, o que f está definida *implícitamente* por la ecuación. Sustituyendo y por $f(x)$ en $4x^2 - 2y = 6$, se obtiene

$$4x^2 - 2f(x) = 6$$
$$4x^2 - 2(2x^2 - 3) = 6$$
$$4x^2 - 4x^2 + 6 = 6$$

La última ecuación es una identidad, pues es válida para todo x en el dominio de f. Esto es lo que caracteriza a las funciones f definidas implícitamente por una ecuación en x y y. Es decir, *f está definida implícitamente por una ecuación si y sólo si al sustituir y por $f(x)$ se llega a una identidad.* Como $(x, f(x))$ es un punto de la gráfica de f, el enunciado anterior implica que *la gráfica de la función implícita f coincide con una parte de (o con toda) la gráfica de la ecuación.*

En el siguiente ejemplo se muestra que una ecuación en x y y puede definir a más de una función implícita.

EJEMPLO 1 ¿Cuántas funciones diferentes quedan definidas implícitamente por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$?

Solución La gráfica de $x^2 + y^2 = 1$ es la circunferencia unitaria con centro en el origen. Despejando y en términos de x obtenemos

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Dos de las funciones implícitas de la ecuación están dadas por

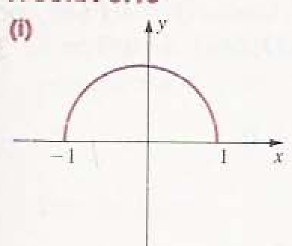
$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{y} \quad g(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Las gráficas de f y g son, respectivamente, la mitad superior y la mitad inferior de la circunferencia unitaria (véase la Figura 3.18(i) y (ii)). Para encontrar otras funciones implícitas podemos tomar cualquier número a entre -1 y 1, y definir una función k por

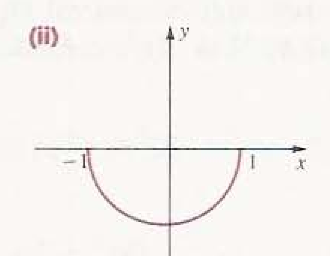
$$k(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & \text{si } -1 \le x \le a \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{si } a < x \le 1. \end{cases}$$

FIGURA 3.18

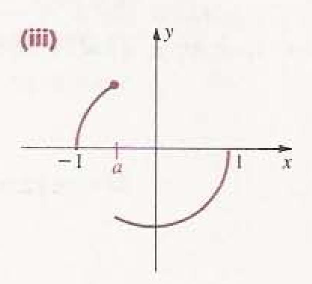
(i)



(ii)



(iii)



La gráfica de k aparece en la Figura 3.18(iii). Obsérvese que hay una discontinuidad de salto en $x = a$. La función k está definida implícitamente por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, ya que

$$x^2 + [k(x)]^2 = 1$$

para todo x en el dominio de k. Haciendo que a tome diferentes valores podemos obtener tantas funciones implícitas como queramos. Hay muchas otras funciones determinadas implícitamente por $x^2 + y^2 = 1$, y la gráfica de cada una de ellas es una parte de la gráfica de la ecuación. •

No es obvio que la ecuación

$$y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$$

defina una función implícita f en el sentido de que al sustituir y por $f(x)$,

$$[f(x)]^4 + 3[f(x)] - 4x^3 = 5x + 1$$

sea una identidad para todo x en el dominio de f. Se pueden enunciar condiciones en las cuales una función implícita existe y es derivable en algunos números de su dominio; sin embargo, se omite la demostración pues requiere métodos más avanzados. En los siguientes ejemplos se supone que una ecuación en x y y define una función derivable f tal que al sustituir y por $f(x)$ la ecuación se convierte en una identidad para todo x en el dominio de f. La derivada de f puede evaluarse por el método de **derivación implícita**.

EJEMPLO 2 Suponiendo que la ecuación $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$ define implícitamente una función derivable f tal que $y = f(x)$, encontrar su derivada.

Solución Tomamos a y como un símbolo que denota a $f(x)$ y consideramos la ecuación como una identidad para todo x en el dominio de f. Entonces las derivadas de ambos lados son iguales; es decir,

$$D_x(y^4 + 3y - 4x^3) = D_x(5x + 1), \quad \text{o bien}$$

(*) $$D_x(y^4) + D_x(3y) - D_x(4x^3) = D_x(5x) + D_x(1).$$

Es importante recordar que en general $D_x y^4 \neq 4y^3$. Como $y = f(x)$, por medio de (3.29) obtenemos $D_x(y^4) = 4y^3y'$. Análogamente, $D_x(3y) = 3D_xy = 3y'$. Sustituyendo en (*),

$$4y^3y' + 3y' - 12x^2 = 5 + 0.$$

Despejando y',

$$(4y^3 + 3)y' = 12x^2 + 5$$

y

$$y' = \frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3}$$

siempre y cuando $4y^3 + 3 \neq 0$. En términos de f,

$$f'(x) = \frac{12x^2 + 5}{4(f(x))^3 + 3} \quad \bullet$$

Las dos últimas ecuaciones en la solución del Ejemplo 2, muestran una desventaja de la derivación implícita: la fórmula para y' (o $f'(x)$) puede tener la expresión y (o $f(x)$). Sin embargo, estas fórmulas son muy útiles para analizar f y su gráfica.

En el ejemplo siguiente se usa la derivación implícita para calcular la pendiente de la recta tangente al punto $P(a, b)$ de la gráfica de una ecuación. En los problemas de este tipo se supone que la ecuación define una función implícita f cuya gráfica coincide con la de la ecuación para todo x en algún intervalo abierto que contiene a a. Obsérvese que, como $P(a, b)$ es un punto de la gráfica, el par ordenado (a, b) debe ser solución de la ecuación.

EJEMPLO 3 Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de

$$y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$$

en el punto $P(1, -2)$.

Solución Nótese que $P(1, -2)$ está en la gráfica, ya que

$$(-2)^4 + 3(-2) - 4(1)^3 = 5(1) + 1.$$

La pendiente m de la recta tangente en $P(1, -2)$ es el valor de la derivada y' cuando $x = 1$ y $y = -2$. La ecuación dada es la misma que la del Ejemplo 2. Ahí encontramos que $y' = (12x^2 + 5)/(4y^3 + 3)$. Sustituyendo x por 1 y y por -2 obtenemos

$$m = \frac{12(1)^2 + 5}{4(-2)^3 + 3} = -\frac{17}{29} \quad \bullet$$

EJEMPLO 4 Suponiendo que $x^2 + y^2 = 1$ define una función f tal que $y = f(x)$, encontrar y'.

Solución Las funciones implícitas definidas por $x^2 + y^2 = 1$ se estudiaron en el Ejemplo 1. Como se hizo en el Ejemplo 2, derivamos ambos lados de la ecuación con respecto a x y así

$$D_x(x^2) + D_x(y^2) = D_x(1).$$

Por lo tanto,

$$2x + 2yy' = 0 \quad \text{o bien} \quad yy' = -x$$

y

$$y' = -\frac{x}{y} \quad \text{si } y \neq 0.$$

El método de derivación implícita proporciona la derivada de *cualquier* función derivable definida por una ecuación en dos variables. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ determina muchas funciones implícitas (véase el Ejemplo 1). La pendiente de la recta tangente en un punto (x, y) de cualquiera de las gráficas de la Figura 3.18 está dada por $y' = -x/y$, siempre y cuando la derivada exista.

EJEMPLO 5 Encontrar y' suponiendo que $4xy^3 - x^2y + x^3 - 5x + 6 = 0$.

Solución Derivando ambos lados de la ecuación con respecto a x,

$$D_x(4xy^3) - D_x(x^2y) + D_x(x^3) - D_x(5x) + D_x(6) = D_x(0).$$

Como y denota a $f(x)$ para alguna función f, aplicaremos la Regla del Producto a $D_x(4xy^3)$ y $D_x(x^2y)$. De este modo,

$$\begin{aligned} D_x(4xy^3) &= 4x\,D_x(y^3) + y^3\,D_x(4x) \\ &= 4x(3y^2y') + y^3(4) \\ &= 12xy^2y' + 4y^3 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} D_x(x^2y) &= x^2\,D_x\,y + y\,D_x(x^2) \\ &= x^2y' + y(2x). \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en la primera ecuación de la solución y derivando los otros términos obtenemos

$$(12xy^2y' + 4y^3) - (x^2y' + 2xy) + 3x^2 - 5 = 0.$$

Reuniendo los términos que contienen y' y pasando los restantes al lado derecho de la ecuación resulta

$$(12xy^2 - x^2)y' = 5 - 3x^2 + 2xy - 4y^3.$$

Por lo tanto,

$$y' = \frac{5 - 3x^2 + 2xy - 4y^3}{12xy^2 - x^2}$$

siempre que $12xy^2 - x^2 \neq 0$.

EJERCICIOS 3.6

Ejercicios 1-8: Encuentre al menos una función f definida implícitamente por la ecuación dada y especifique el dominio de f.

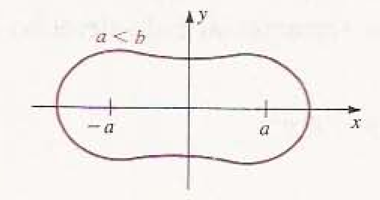
1. $3x - 2y + 4 = 2x^2 + 3y - 7x$
2. $x^3 - xy + 4y = 1$
3. $x^2 + y^2 - 16 = 0$
4. $3x^2 - 4y^2 = 12$
5. $x^2 - 2xy + y^2 = x$
6. $3x^2 - 4xy + y^2 = 0$
7. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$
8. $|x - y| = 2$

Ejercicios 9-20: Encuentre y' suponiendo que la ecuación define una función derivable f tal que $y = f(x)$.

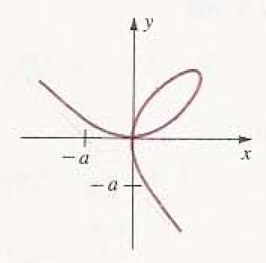
9. $8x^2 + y^2 = 10$
10. $4x^3 - 2y^3 = x$
11. $2x^3 + x^2y + y^3 = 1$
12. $5x^2 + 2x^2y + y^2 = 8$
13. $5x^2 - xy - 4y^2 = 0$
14. $x^4 + 4x^2y^2 - 3xy^3 + 2x = 0$
15. $(1/x^2) + (1/y^2) = 1$
16. $x = y + 2y^2 + 3y^3$
17. $x^2y^3 + 4xy + x - 6y = 2$
18. $4 - 7xy = (y^2 + 4)^5$
19. $(y^2 - 9)^4 = (4x^2 + 3x - 1)^2$
20. $(1 + xy)^3 = 2x^2 - 9$

Ejercicios 21-24: Se dan la ecuación de una curva clásica y un croquis de su gráfica para algunos valores positivos de las constantes a y b. (Para mayor información consulte libros de geometría analítica.) Calcule la pendiente de la recta tangente en el punto P para los valores dados de a y b.

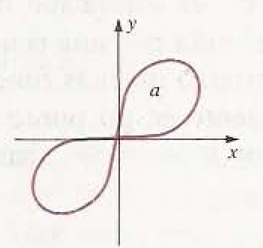
21. *Óvalos de Cassini:* $(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = b^4$; $a = 2$, $b = \sqrt{6}$, $P(2, \sqrt{2})$.



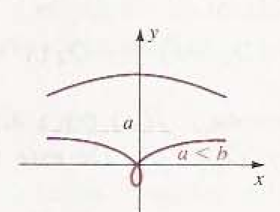
22. *Folio de Descartes:* $x^3 + y^3 - 3axy = 0$; $a = 4$, $P(6, 6)$.



23. *Lemniscata de Bernoulli:* $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$; $a = \sqrt{2}$, $P(1, 1)$.



24. *Concoide de Nicomedes:* $(y - a)^2(x^2 + y^2) = b^2y^2$; $a = 2$, $b = 4$, $P(\sqrt{15}, 1)$.



Ejercicios 25-28: Encuentre una ecuación para la recta tangente en el punto P a la gráfica de la ecuación dada.

25. $xy + 16 = 0$, $P(-2, 8)$
26. $y^2 - 4x^2 = 5$, $P(-1, 3)$
27. $2x^3 - x^2y + y^3 - 1 = 0$, $P(2, -3)$
28. $(1/x) + (3/y) = 1$, $P(2, 6)$
29. Demuestre que la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$ no define una función f tal que $y = f(x)$.
30. Demuestre que la ecuación $y^2 = x$ determina un número infinito de funciones implícitas. Trace las gráficas de cuatro de esas funciones.
31. ¿Cuántas funciones implícitas quedan definidas por cada una de las ecuaciones?
    (a) $x^4 + y^4 - 1 = 0$
    (b) $x^4 + y^4 = 0$
    (c) $y^2 + \sqrt{x} + 4 = 0$

32. Utilice la derivación implícita para tornar patente que si P es cualquier punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, la recta tangente en P es perpendicular a OP.

33. Suponga que $3x^2 - x^2y^3 + 4y = 12$ define una función derivable f tal que $y = f(x)$. Use diferenciales para estimar el incremento de $f(x)$ cuando x varía de 2 a 1.97, suponiendo que $f(2) = 0$.

34. Considere que $x^3 + xy + y^4 = 19$ define una función diferenciable f tal que $y = f(x)$. Suponiendo que $P(1, 2)$ es un punto de la gráfica de f, use diferenciales para estimar la ordenada b del punto de la gráfica $Q(1.10, b)$.

3.7 POTENCIAS Y DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

La regla de la potencia (3.10) se puede ampliar al caso de exponentes *racionales*. Si

$$y = x^{m/n}$$

donde m y n son enteros y $n \neq 0$, entonces

$$y^n = x^m.$$

Suponiendo que y' existe y que los denominadores no se anulan, derivando implícitamente se obtiene que

$$D_x\, y^n = D_x\, x^m$$

o bien

$$ny^{n-1}\, D_x\, y = mx^{m-1}.$$

Por lo tanto,

$$D_x\, y = \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}} = \frac{m}{n}\, x^{m-1}y^{1-n} = \frac{m}{n}\, x^{m-1}(x^{m/n})^{1-n}.$$

El lado derecho se puede simplificar con las leyes de los exponentes, con lo que se llega a la **Regla de la Potencia para Exponentes Racionales:** *Si m y n son enteros y $n \neq 0$, entonces*

$$D_x\,(x^{m/n}) = \frac{m}{n}\, x^{(m/n)-1}.$$

Ésta es una demostración incompleta de la fórmula pues en ella se supone que y' existe. Puede darse una demostración completa mediante la definición de derivada.

EJEMPLO 1 Encontrar y' si $y = 6\sqrt[3]{x^4} + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$.

Solución Utilizando exponentes racionales podemos escribir $y = 6x^{4/3} + 4x^{-1/2}$. Aplicando la Regla de la Potencia,

$$\begin{aligned} y' &= 6(\tfrac{4}{3})x^{(4/3)-1} + 4(-\tfrac{1}{2})x^{-(1/2)-1} \\ &= 8x^{1/3} - 2x^{-3/2} \\ &= 8x^{1/3} - \frac{2}{x^{3/2}} \end{aligned}$$

y en términos de radicales,

$$y' = 8\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x^3}} \quad \bullet$$

La Regla de la Potencia para Funciones (3.27) es válida para cualquier exponente *racional*. El siguiente ejemplo ilustra esta regla.

EJEMPLO 2 Encontrar $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt[3]{5x^2 - x + 4}$.

Solución Escribiendo $f(x) = (5x^2 - x + 4)^{1/3}$ y usando la Regla de la Potencia para Funciones con $n = \frac{1}{3}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{3}(5x^2 - x + 4)^{-2/3} D_x(5x^2 - x + 4) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{(5x^2 - x + 4)^{2/3}}(10x - 1) \\ &= \frac{10x - 1}{3\sqrt[3]{(5x^2 - x + 4)^2}} \end{aligned} \quad \bullet$$

EJEMPLO 3 Hallar dy/dx si $y = (3x + 1)^6\sqrt{2x - 5}$.

Solución Como $y = (3x + 1)^6(2x - 5)^{1/2}$, aplicando las reglas del Producto y de la Potencia obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (3x + 1)^6\tfrac{1}{2}(2x - 5)^{-1/2}(2) + (2x - 5)^{1/2}6(3x + 1)^5(3) \\ &= \frac{(3x + 1)^6}{\sqrt{2x - 5}} + 18(3x + 1)^5\sqrt{2x - 5} \\ &= \frac{(3x + 1)^6 + 18(3x + 1)^5(2x - 5)}{\sqrt{2x - 5}} \\ &= \frac{(3x + 1)^5(39x - 89)}{\sqrt{2x - 5}} \end{aligned} \quad \bullet$$

El interés del siguiente ejemplo radica en que ilustra el hecho de que para obtener una derivada, a veces hay que aplicar la Regla de la Potencia más de una vez.

EJEMPLO 4 Determinar $f'(x)$ para $f(x) = (7x + \sqrt{x^2 + 6})^4$.

Solución Aplicando la citada regla para las potencias,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(7x + \sqrt{x^2 + 6})^3 D_x(7x + \sqrt{x^2 + 6}) \\ &= 4(7x + \sqrt{x^2 + 6})^3[D_x(7x) + D_x\sqrt{x^2 + 6}]. \end{aligned}$$

Aplicando otra vez la Regla de la Potencia,

$$D_x\sqrt{x^2+6} = D_x(x^2+6)^{1/2} = \tfrac{1}{2}(x^2+6)^{-1/2}D_x(x^2+6)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+6}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+6}}.$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = 4(7x+\sqrt{x^2+6})^3\left[7+\frac{x}{\sqrt{x^2+6}}\right] \bullet$$

EJEMPLO 5 La tripulación de un barco divisa desde cubierta una ballena y calcula que tiene una longitud L de 32 pie con un error posible de ±2 pie. Las investigaciones sobre las ballenas han mostrado que su peso W (en toneladas métricas) se relaciona con L según la fórmula $W = 0.000137L^{3.18}$. Usar diferenciales para estimar el error en el cálculo del peso de la ballena con una precisión de un décimo de tonelada métrica. ¿Cuánto vale aproximadamente el error porcentual?

Solución Para utilizar los métodos del cálculo debemos suponer que W es una función derivable de L. Usando la fórmula para hallar W con $L = 32$ obtenemos

$$W = (0.000137)32^{3.18} \approx (0.000137)(61{,}147.25) \approx 8.4 \text{ toneladas métricas.}$$

Denotemos por ΔL el error en la medición de L y por ΔW el error correspondiente en el valor calculado de W. Podemos estimar estos errores usando dL y dW, como se hizo en la Sección 3.4. Aplicando la Definición (3.22)(ii) y la Regla de la Potencia para Exponentes Racionales,

$$dW = \left(\frac{dW}{dL}\right)dL = (0.000137)(3.18)L^{2.18}\,dL$$
$$= 0.00043566L^{2.18}\,dL.$$

Sustituyendo $L = 32$ y $dL = \pm 2$, y usando calculadora, se ve que el error en la estimación de W es aproximadamente

$$dW = (0.00043566)32^{2.18}(\pm 2)$$
$$\approx (0.00043566)(1910.85)(\pm 2) \approx \pm 1.7 \text{ toneladas métricas.}$$

Por la Definición (3.25),

$$\text{Error medio } = \frac{\Delta W}{W} \approx \frac{dW}{W} \approx \pm\frac{1.7}{8.4} \approx \pm 0.20$$

y

$$\text{Error porcentual} \approx \pm(0.20)(100\%) = \pm 20\% \bullet$$

Cuando se deriva una función f, se obtiene otra función f'. Cuando f' tiene derivada, ésta se denota por f'' y se la llama **segunda derivada** de f. Así

$$f''(x) = D_x[f'(x)] = D_x[D_x(f(x))] = D_x^2 f(x).$$

Como está indicado, puede utilizarse el operador D_x^2 para denotar segundas derivadas. La **tercera derivada** f''' de f es la derivada de la segunda derivada. Concretamente,

$$f'''(x) = D_x\,[f''(x)] = D_x\,[D_x^2\,f(x)] = D_x^3\,f(x).$$

En general, si n es un entero positivo, entonces $f^{(n)}$ denota la ***n*-ésima derivada** de f, la cual se calcula tomando f y derivando n veces sucesivamente. Con la notación de operadores, $f^{(n)}(x) = D_x^n f(x)$. El entero n se denomina **orden** de la derivada $f^{(n)}(x)$. A continuación se presenta un resumen de las diversas notaciones que se utilizan para estas **derivadas de orden superior** de $y = f(x)$.

NOTACIONES PARA LAS DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR (3.30)

$$f'(x),\quad f''(x),\quad f'''(x),\quad f^{(4)}(x),\quad \ldots,\quad f^{(n)}(x)$$
$$D_x y,\quad D_x^2 y,\quad D_x^3 y,\quad D^4{}_x y,\quad \ldots,\quad D_x^n y$$
$$y',\quad y'',\quad y''',\quad y^{(4)},\quad \ldots,\quad y^{(n)}$$
$$\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^3y}{dx^3},\quad \frac{d^4y}{dx^4},\quad \ldots,\quad \frac{d^ny}{dx^n}$$

La notación diferencial d^ny/dx^n para derivadas de orden superior *no* debe interpretarse como un cociente.

EJEMPLO 6 Sea $f(x) = 4x^2 - 5x + 8 - (3/x)$. Encontrar las primeras cuatro derivadas de $f(x)$.

Solución Como $f(x) = 4x^2 - 5x + 8 - 3x^{-1}$.

$$f'(x) = 8x - 5 + 3x^{-2} = 8x - 5 + \frac{3}{x^2}$$

$$f''(x) = 8 - 6x^{-3} = 8 - \frac{6}{x^3}$$

$$f'''(x) = 18x^{-4} = \frac{18}{x^4}$$

$$f^{(4)}(x) = -72x^{-5} = -\frac{72}{x^5}$$

•

El siguiente ejemplo muestra como pueden evaluarse las derivadas de orden superior de las funciones implícitas.

EJEMPLO 7 Hallar y'' para $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$.

Solución Ya estudiamos esta ecuación en el Ejemplo 2 de la Sección 3.6, donde encontramos que

$$y' = \frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3}.$$

Por lo tanto, $$y'' = D_x(y') = D_x\left(\frac{12x^2+5}{4y^3+3}\right).$$

Ahora derivamos implícitamente empleando la Regla del Cociente como sigue:

$$y'' = \frac{(4y^3+3)\,D_x(12x^2+5) - (12x^2+5)\,D_x(4y^3+3)}{(4y^3+3)^2}$$

$$= \frac{(4y^3+3)(24x) - (12x^2+5)(12y^2y')}{(4y^3+3)^2}.$$

Sustituyendo y' obtenemos

$$y'' = \frac{(4y^3+3)(24x) - (12x^2+5)\cdot 12y^2\left(\dfrac{12x^2+5}{4y^3+3}\right)}{(4y^3+3)^2}$$

$$= \frac{(4y^3+3)^2(24x) - 12y^2(12x^2+5)^2}{(4y^3+3)^3}.$$

En la Definición (3.18) se definió la aceleración en el movimiento rectilíneo como la segunda derivada s'' de la función de posición s. En el siguiente capítulo se estudiarán algunas otras aplicaciones de las derivadas de orden superior.

EJERCICIOS 3.7

Ejercicios 1-24: Derive la función dada.

1. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt{x^3}$
2. $f(x) = 10\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[3]{x^5}$
3. $k(r) = \sqrt[3]{8r^3 + 27}$
4. $h(z) = (2z^2 - 9z + 8)^{-2/3}$
5. $F(v) = 5/\sqrt[5]{v^5 - 32}$
6. $k(s) = 1/\sqrt{3s - 4}$
7. $f(x) = \sqrt{2x}$
8. $g(x) = \sqrt[3]{1/x}$
9. $f(z) = 10\sqrt{z^3} + (3/\sqrt[3]{z})$
10. $f(t) = \sqrt[3]{t^2} - (1/\sqrt{t^3})$
11. $g(w) = (w^2 - 4w + 3)/w^{3/2}$
12. $K(x) = 8x^2\sqrt{x} + 3x\sqrt[3]{x}$
13. $M(x) = \sqrt{4x^2 - 7x + 4}$
14. $F(s) = \sqrt[3]{5s - 8}$
15. $f(t) = 4/(9t^2 + 16)^{2/3}$
16. $k(v) = 1/\sqrt{(v^4 + 7v^2)^3}$
17. $H(u) = \sqrt{\dfrac{3u + 8}{2u + 5}}$
18. $G(x) = \left(\dfrac{x}{x^2 + 1}\right)^{5/2}$
19. $k(s) = \sqrt[4]{s^2 + 9}(4s + 5)^4$
20. $g(y) = (15y + 2)(y^2 - 2)^{3/4}$
21. $h(x) = (x^2 + 4)^{5/3}(x^3 + 1)^{3/5}$
22. $f(w) = \sqrt{w^3(9w + 1)^5}$
23. $f(x) = (7x + \sqrt{x^2 + 3})^6$
24. $p(z) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + 2z}}$

Ejercicios 25-26: Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación en el punto P.

25. $y = \sqrt{2x^2 + 1}$, $P(-1, \sqrt{3})$
26. $y = (5x - 8)^{1/3}$, $P(7, 3)$
27. Determine el punto P de la gráfica de $y = \sqrt{2x - 4}$ para el que su recta tangente pasa por el origen.
28. Determine los puntos de la gráfica de $y = x^{5/3} + x^{1/3}$ para los que su recta tangente es perpendicular a la recta $2y + x = 7$.

Ejercicios 29-32: Evalúe y' suponiendo que la ecuación dada define una función f tal que $y = f(x)$.

29. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 100$ **30.** $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$

31. $6x + \sqrt{xy} - 3y = 4$ **32.** $xy^2 + \sqrt[3]{xy} + x^4 = 7$

33. Los pinnípedos, como las focas y las morsas, son un suborden de los mamíferos acuáticos carnívoros cuyas extremidades se han convertido en aletas. La relación entre la longitud y el peso durante su crecimiento fetal está dada por $W = (6 \times 10^{-5})L^{2.74}$, donde la longitud L se mide en centímetros y el peso W en kilogramos. Usando la Regla de la Cadena encuentre una fórmula para la tasa de crecimiento del peso con respecto al tiempo t, suponiendo que L es una función derivable de t. Si una foca pesa 0.5 kg y crece a razón de 0.4 kg por mes, ¿cuál es la tasa de crecimiento de su longitud?

34. La fórmula para la expansión adiabática del aire es $pv^{1.4} = c$, donde p es la presión, v el volumen y c una constante. Obtenga una fórmula para la tasa de cambio de la presión con respecto al volumen.

35. El área S de la superficie curva de un cono circular recto de altura h y radio r está dada por $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$. Un cono con radio $r = 6$ cm, tiene una altura de 8 cm, con un error máximo en la medición de 0.1 cm. Calcule S a partir de estas medidas y use diferenciales para estimar el error máximo en el cálculo. Calcule también el error porcentual.

36. El periodo T de un péndulo simple de longitud l se puede calcular con la fórmula $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, donde g es una constante. Use diferenciales para estimar el cambio en l que provoca un incremento de 1% en T.

Ejercicios 37-40: Determine $f'(x)$ aprovechando el hecho de que $|a| = \sqrt{a^2}$. Halle también el dominio de f' y trace la gráfica de f.

37. $f(x) = |1 - x|$ **38.** $f(x) = |x^3 - x|$

39. $f(x) = |1 - x^2|$ **40.** $f(x) = x/|x|$

Ejercicios 41-46: Determine la primera y la segunda derivadas.

41. $g(z) = \sqrt{3z + 1}$

42. $k(s) = (s^2 + 4)^{2/3}$

43. $k(r) = (4r + 7)^5$

44. $f(x) = \sqrt[5]{10x + 7}$

45. $f(x) = 3x^4 - 4x^2 + x - 2$

46. $g(x) = 3x^8 - 2x^5$

Ejercicios 47-50: Determine $D_x^3 y$.

47. $y = 2x^5 + 3x^3 - 4x + 1$ **48.** $y = \sqrt{2 - 5x}$

49. $y = (2x - 3)/(3x + 1)$ **50.** $y = (3x + 1)^4$

Ejercicios 51-54: Suponiendo que la ecuación define una función f tal que $y = f(x)$, encuentre y'' si es que existe.

51. $x^3 - y^3 = 1$

52. $x^2y^3 = 1$

53. $x^2 - 3xy + y^2 = 4$

54. $\sqrt{xy} - y + x = 0$

55. Sea $f(x) = 1/x$. Encuentre una fórmula para $f^{(n)}(x)$ para todo entero positivo n. Halle el valor de $f^{(n)}(1)$.

56. Sea $f(x) = \sqrt{x}$. Encuentre una fórmula para $f^{(n)}(x)$ para todo entero positivo n.

57. Demuestre que si $f(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $f^{(k)}(x) = 0$ para $k > n$.

58. Sean $u = f(x)$ y $v = g(x)$, donde f y g tienen derivadas de todos los órdenes. Sea también $y = uv$. Demuestre que

$$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$
$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$
$$y^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}.$$

Proponga una fórmula para $y^{(n)}$. (*Sugerencia:* Use el Teorema del Binomio (3.9).)

59. Sea $y = f(g(x))$, donde f'' y g'' existen. Aplique la Regla de la Cadena para expresar $D_x^2 y$ en términos de la primera y la segunda derivadas y de f y g.

60. Suponga que f tiene segunda derivada. Demuestre (a) que si f es una función par entonces f'' es par, y (b) que si f es una función impar entonces f'' es impar. Ejemplifique estos resultados con funciones polinomiales.

3.8 RAPIDECES DE VARIACIÓN RELACIONADAS

En las aplicaciones frecuentemente aparecen dos variables x y y que son funciones derivables del tiempo t; por ejemplo $x = f(t)$ y $y = g(t)$. Además, x y y pueden estar relacionadas entre sí por medio de una ecuación como la siguiente

$$x^2 - y^3 - 2x + 7y^2 - 2 = 0.$$

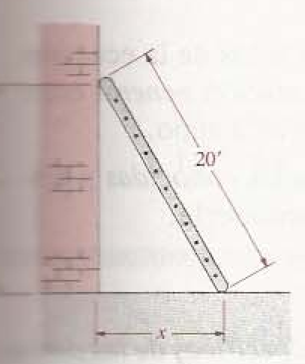
Derivando con respecto a t y usando la Regla de la Cadena se obtiene una ecuación en la que aparecen las razones de cambio respecto al tiempo dx/dt y dy/dt:

$$2x\frac{dx}{dt} - 3y^2\frac{dy}{dt} - 2\frac{dx}{dt} + 14y\frac{dy}{dt} = 0.$$

Las derivadas dx/dt y dy/dt se llaman **rapideces de variación relacionadas** ya que están vinculadas o relacionadas efectivamente por medio de una ecuación. Tal ecuación puede usarse para evaluar una de las derivadas cuando se conoce la otra. Esto tiene muchas aplicaciones prácticas como se verá en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1 Una escalera de 20 pie de largo está apoyada contra la pared de un edificio. La base de la escalera se desliza horizontalmente a razón de 10 pie/s. ¿Con qué rapidez resbala el otro extremo de la escalera cuando se encuentra a 12 pie del suelo?

FIGURA 3.19



Solución Comenzamos por representar esquemáticamente la posición de la escalera en la Figura 3.19 usando la variable x para denotar la distancia del edificio a la base de la escalera y otra variable y para denotar la altura sobre el suelo del otro extremo de la misma.

Como x aumenta a razón de 2 pie/s,

$$\frac{dx}{dt} = 2 \text{ pie/s}.$$

Nuestro objetivo es hallar dy/dt, la rapidez de cambio de la altura del extremo superior de la escalera en el momento en que $y = 12$ pie.

Se puede encontrar una relación entre x y y aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por la pared, el suelo y la escalera (véase la Figura 3.19). Esto da

$$x^2 + y^2 = 400.$$

Derivando ambos lados de la ecuación con respecto a t,

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

o bien, si $y \neq 0$,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}.$$

Esta última ecuación es una fórmula *general* que relaciona las dos derivadas dx/dt y dy/dt. Consideremos ahora el caso especial en que $y = 12$. El valor correspondiente de x se puede obtener de

$$x^2 + 144 = 400 \quad \text{o bien} \quad x^2 = 400 - 144 = 256.$$

Por lo tanto $x = \sqrt{256} = 16$ cuando $y = 12$. Sustituyendo en la fórmula general de dy/dt obtenemos

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{16}{12}(2) = -\frac{8}{3} \text{ pie/s.} \quad \bullet$$

A continuación se dan algunas recomendaciones que pueden servir de guía para problemas de rapidez de variación como el del Ejemplo 1.

GUÍA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE RAPIDECES DE VARIACIÓN RELACIONADAS (3.31)

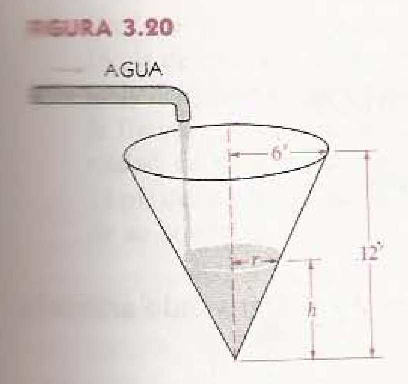
1. Leer cuidadosamente el problema varias veces y pensar en los datos y en las cantidades que se desea calcular.
2. Hacer un croquis o esquema apropiado y dar nombre a las variables y a las cantidades desconocidas.
3. Escribir los hechos conocidos expresando las rapideces de variación dadas y las desconocidas como derivadas de las variables.
4. Encontrar una ecuación *general* que relacione las variables.
5. Derivar con respecto a t ambos lados de la ecuación del punto 4 para obtener una relación *general* entre las razones de cambio respecto al tiempo.
6. Sustituir los valores y las derivadas *conocidas* y despejar la rapidez de cambio desconocida.

Un error que se comete frecuentemente es usar los valores específicos de las derivadas y las variables demasiado pronto en la resolución. Recuérdese siempre obtener una fórmula *general* que correlacione las rapideces de variación para *todo* tiempo t. Los valores específicos de las variables deben sustituirse solamente en los últimos pasos de la resolución.

EJEMPLO 2 Un tanque de agua tiene la forma de un cono circular recto de 12 pie de alto y 6 pie de radio en la base. Si se suministra agua al tanque a razón de 10 galones por minuto (gal/min), ¿cuál será la rapidez de cambio del nivel del agua cuando la profundidad es de 3 pie? (1 gal $\approx$ 0.1337 pie^3).

Solución Aplicando el punto 2 de la Guía, comenzamos por esquematizar el tanque como se ve en la Figura 3.20, usando r para denotar el radio de la superficie del agua cuando la profundidad es h. Adviértase que r y h son funciones del tiempo t

FIGURA 3.20



Siguiendo el consejo 3, se expresan las relaciones conocidas entre V, r y h. Sabemos que $dV/dt = 10$ gal/min y se desea encontrar dh/dt cuando $h = 3$ pie. El volumen V del agua en el tanque que corresponde a una profundidad h es

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Esta fórmula para V relaciona V, r y h (véase el consejo 4 de la Guía). Antes de derivar con respecto a t debe expresarse V en términos de una variable. Consultando la Figura 3.20, por triángulos semejantes obtenemos

$$\frac{r}{h} = \frac{6}{12} \quad \text{o bien} \quad r = \frac{h}{2}.$$

Por lo tanto, cuando la profundidad es h,

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3.$$

Derivando con respecto a t (véase el punto 5 de la Guía) se obtiene la siguiente relación general entre las derivadas de V y h en todo tiempo:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt}.$$

Cuando $h \neq 0$ se puede despejar dh/dt y obtener una fórmula equivalente:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}.$$

Por último (véase el punto 6 de la Guía), sustituimos $h = 3$ y $dV/dt = 10$ gal/min $\approx$ 1.337 pie^3/min, obtenemos

$$\frac{dh}{dt} \approx \frac{4}{\pi(9)}(1.337) \approx 0.189 \text{ pie/min.} \quad \bullet$$

En los ejemplos restantes ya no se hará referencia a las recomendaciones de la Guía. El lector podrá reconocerlas al estudiar las soluciones.



FIGURA 3.21



EJEMPLO 3 A las 13:00 horas el barco A se encuentra a 25 millas al sur del barco B. Suponiendo que A navega hacia el oeste a razón de 16 mi/h, y que B navega hacia el sur a 20 mi/h, evaluar la rapidez de cambio o variación de la distancia entre los dos barcos a las 13:30.

Solución En la Figura 3.21 aparece un croquis del problema. En ella se han usado x y y para denotar las millas recorridas por los barcos A y B, respectivamente, t horas después de la una de la tarde (13:00). Los puntos P y Q marcan las posiciones a las 13 horas y z denota la distancia entre las embarcaciones al tiempo t.

Sabemos que

$$\frac{dx}{dt} = 16\,\text{mi/h} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = 20\,\text{mi/h}.$$

Deseamos determinar dz/dt. Por el Teorema de Pitágoras,

$$z^2 = x^2 + (25 - y)^2.$$

Ésta es una ecuación *general* que relaciona las variables x, y y z. Derivando ambos lados con respecto a t,

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2(25 - y)\left(-\frac{dy}{dt}\right)$$

o bien

$$z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + (y - 25)\frac{dy}{dt}.$$

A las 13:30 los barcos han navegado durante media hora y así

$$x = 8, \quad y = 10, \quad \text{y} \quad 25 - y = 15.$$

Por lo tanto,

$$z^2 = 64 + 225 = 289 \quad \text{o bien} \quad z = 17.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación en la que aparece dz/dt, obtenemos

$$17\frac{dz}{dt} = 8(16) + (-15)(20)$$

o bien

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{172}{17} \approx -10.12\,\text{mi/h}.$$

El signo negativo indica que a las 13:30 horas la distancia entre los barcos va disminuyendo.

Otro método para resolver el problema consiste en escribir $x = 16t$, $y = 20t$, y

$$z = [x^2 + (25 - y)^2]^{1/2} = [256t^2 + (25 - 20t)^2]^{1/2}.$$

La derivada dz/dt puede evaluarse directamente y, sustituyendo t por $\frac{1}{2}$, se obtiene la rapidez de variación deseada. •

EJERCICIOS 3.8

1. Una escalera de 20 pie de largo está apoyada contra la pared de un edificio. La base de la escalera resbala alejándose de la pared a razón de 3 pie/s. ¿Con qué rapidez desciende el extremo superior de la escalera cuando se encuentra a 8 pie del piso?

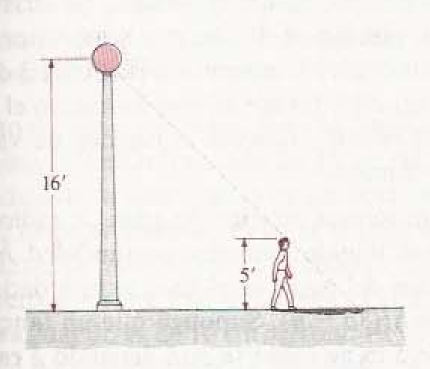
2. Cuando un disco metálico circular se calienta, su diámetro aumenta a razón de 0.01 cm/min. ¿Cuál es la rapidez de cambio del área de uno de sus lados?

3. Se inyecta gas a un globo esférico a razón de 5 pie^3/min. ¿Si la presión se mantiene constante, cuál es la rapidez de cambio del radio cuando el diámetro mide 18 pulg?

4. Una niña comienza a correr a partir de un punto A hacia el este, a 3 m/s. Un minuto después, otra niña sale corriendo desde A hacia el norte a 2 m/s. ¿Cuál es la rapidez de variación de la distancia entre las niñas un minuto más tarde?

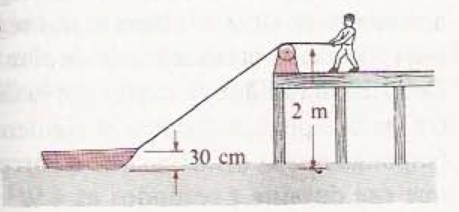
5. Un farol se encuentra en lo alto de un poste de 16 pie de altura. Un niño de 5 pie de estatura se aleja del poste a una velocidad de 4 pie/s (véase la figura). ¿Con qué rapidez se mueve la extremidad de su sombra cuando él se encuentra a 18 pie del poste? ¿Cuál es la tasa de crecimiento de su sombra?

EJERCICIO 5



6. Un hombre que está en un muelle tira de una cuerda atada a la proa de un bote que se halla 30 cm sobre el nivel del agua. La cuerda pasa sobre una polea simple que se encuentra en el muelle a 2 m del agua (véase la figura). Si tira de la cuerda a razón de 1 m/s, ¿con qué rapidez se acerca el bote al muelle en el momento en que la proa está a 6 m del punto sobre el agua que se encuentra directamente abajo de la polea.

EJERCICIO 6

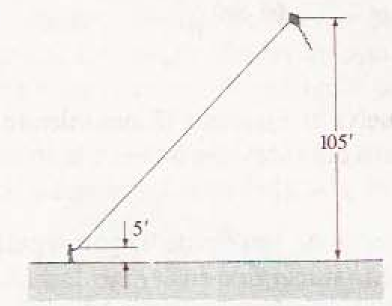


7. La cubierta de un silo tiene la forma de un hemisferio de 6 m de diámetro. En dicha cubierta se deposita una capa de hielo de 5 cm de grueso que disminuye a razón de 0.5 cm/h. ¿Cuál es la rapidez de variación del volumen de hielo?

8. La arena que escurre por un agujero de un recipiente forma un montículo cónico cuya altura es igual al radio de su base. Cuando la altura del montículo es de 25 cm, aumenta a razón de 15 cm/min. Calcule el volumen de arena que sale del agujero por minuto, cuando la altura es de 25 cm.

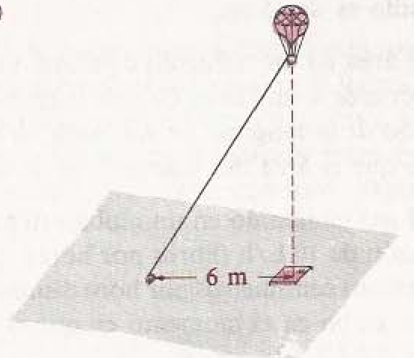
9. Un niño que hace volar una cometa sostiene el cordel a 5 pie del suelo y lo va soltando a razón de 2 pie/s, mientras la cometa se mueve horizontalmente a una altura de 105 pie (véase la figura). Suponiendo que el hilo se mantiene recto, encuentre la rapidez con la que se mueve la cometa cuando se han soltado 125 pie del hilo.

EJERCICIO 9



10. Un globo de aire caliente se eleva en forma vertical y una cuerda atada a la base del globo se va soltando a razón de 1.5 m/s. El torno desde el cual se suelta la cuerda está a 6 m de la plataforma de abordaje. ¿Si se han soltado 150 m de cuerda, con qué rapidez asciende el globo?

EJERCICIO 10

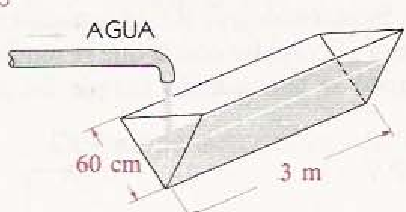


11. La ley de Boyle de los gases asevera que $pv = c$, donde p es la presión, v el volumen y c una constante. En cierto momento el volumen es de 75 pulg^3, la presión es de 30 lb/pulg^2 y ésta disminuye a razón de 2 lb/pulg^2 por minuto. ¿Cuál es la rapidez de cambio del volumen en ese momento?

12. Una bola esférica de nieve se derrite de manera que su radio disminuye con rapidez constante, de 30 a 20 cm en 45 min. ¿Cuál era la rapidez de cambio del volumen en el momento en que el radio medía 25 cm?

13. Los extremos de un abrevadero de 3 m de largo tienen la forma de triángulo equilátero, con lados de 60 cm. Se suministra agua al abrevadero a razón de 20 L/min. ¿Cuál es la rapidez de cambio o variación del nivel del agua cuando la profundidad es 20 cm? [1 L (litro) = 1000 cm^3.]

EJERCICIO 13



14. Resuelva el Ejercicio 13 suponiendo que los extremos del abrevadero tienen la forma de la gráfica de $y = 2|x|$ entre los puntos $(-1, 2)$ y $(1, 2)$.

15. Un cable de 100 pie de largo y 4 pulg de diámetro está sumergido en el mar. Debido a la corrosión, el área de la superficie del cable disminuye a razón de 750 pulg^2/año. Encuentre la rapidez con la que decrece el diámetro, despreciando la corrosión en los extremos del cable.

16. Un incendio que comenzó en un terreno seco se extiende formando un círculo. El radio del círculo crece a razón de 1.8 m/min. Calcule la rapidez con que crece el área del círculo cuando el radio es de 45 m.

17. El área de un triángulo equilátero disminuye a razón de 4 cm^2/min. Calcule la rapidez de variación de la longitud de sus lados en el momento en que el área del triángulo es de 200 cm^2.

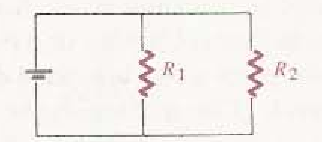
18. El gas contenido en un globo esférico escapa a razón de 10 L/h (libros por hora). ¿A razón de cuántos centímetros por hora disminuye el radio del globo en el momento en que el volumen es de 400 L?

19. Se lanza una piedra a un lago y produce ondas circulares cuyos radios crecen a razón de 0.5 m/s. ¿A razón de cuántos metros por segundo aumenta el perímetro de una onda cuando su radio mide 4 m?

20. El "diamante" de un campo de *softball* tiene la forma de un cuadrado de 60 pie de lado. Una jugadora corre de segunda a tercera base a 25 pie/s. ¿A razón de cuántos pies por segundo va cambiando su distancia a "home plate" cuando está a 20 pie de la tercera base?

21. Cuando dos resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo (véase la figura), la resistencia total R está dada por $1/R = (1/R_1) + (1/R_2)$. Si R_1 y R_2 aumentan a razón de 0.01 Ω/s (ohms por segundo) y 0.02 Ω/s, respectivamente, ¿a razón de cuántos ohms por segundo varía R en el momento en que $R_1 = 30\,\Omega$ y $R_2 = 90\,\Omega$?

EJERCICIO 21



22. La fórmula de la expansión adiabática del aire es $pv^{1.4} = c$, donde p es la presión, v es el volumen y c es una constante. En cierto momento la presión es 40 din/cm^2 (dinas por centímetro cuadrado) y aumenta a razón de 3 din/cm^2 por segundo. En ese mismo momento el volumen es de 60 cm^3. Calcule la rapidez de variación del volumen.

23. Un tanque esférico de agua de radio a contiene este líquido con una profundidad h y el volumen del agua en el tanque está dado por $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3a - h)$. Suponga que un tanque esférico de 5 m de radio se está llenando a razón de 400 L/min. Calcule a razón de cuántos metros por segundo se eleva el nivel del agua cuando $h = 1.25$ m.

24. Un tanque esférico está cubierto por una capa uniforme de hielo de 2 pulg de grueso. El volumen de hielo se derrite con una rapidez directamente proporcional al área de la superficie. Demuestre que es constante la rapidez de cambio del diámetro exterior.

25. Un niño deja caer una piedra a un lago desde un acantilado de 60 m de altura y, dos segundos después, deja caer otra piedra desde el mismo lugar. Describa la rapidez de cambio de la distancia entre las dos piedras durante el siguiente segundo (suponga que la distancia que recorre un cuerpo que cae durante t segundos es $4.9t^2$ m).

26. Una barra de metal tiene la forma de un cilindro circular recto. Cuando se calienta, su longitud y su diámetro aumentan a razón de 0.005 cm/min y 0.002 cm/min, respectivamente. ¿A razón de cuántos centímetros cúbicos por minuto aumenta el volumen de la barra en el momento en que mide 40 cm de largo y 3 cm de diámetro?

27. Un avión vuela con velocidad constante de 500 km/h y con una inclinación de 45° hacia arriba. Encuentre la rapidez de cambio de la distancia del avión a una torre de control en tierra, un minuto después de que éste pasó directamente a 3 km arriba de ella (desprecie la altura de la torre).

28. Una carretera A que va de norte a sur y otra B que va de este a oeste se cruzan en un punto P

A las 10:00 horas un automóvil pasa por P viajando hacia el norte por la carretera A a 80 km/h. En ese mismo momento, un avión que vuela hacia el este a 320 km/h y a 8000 m de altura, se encuentra directamente arriba de un punto en la carretera B que se halla 160 km al oeste de P. Si ambos mantienen la misma velocidad y la misma dirección, ¿cuál es la rapidez de cambio de la distancia entre el avión y el automóvil a las 10:15 horas?

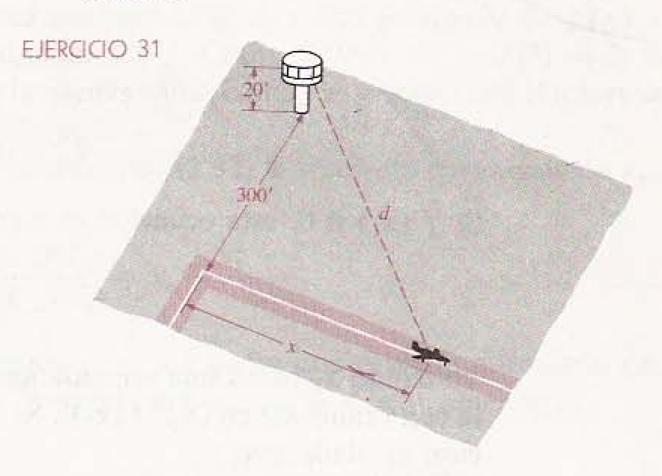
29. Un vaso de papel con agua tiene la forma de un cono circular recto truncado de 15 cm de altura con radios de la base y de la orilla libre de 2 cm y 4 cm, respectivamente. El agua se fuga del vaso a razón de 100 cm^3/h. ¿A razón de cuántos centímetros por hora disminuye la profundidad del agua cuando es de 10 cm? (*Nota:* El volumen V de un cono circular recto truncado de altura h y radios a y b en los extremos está dado por $V = \frac{1}{3}\pi h(a^2 + b^2 + ab)$.)

30. La orilla de una piscina es un rectángulo de 60 pie de largo y 30 pie de ancho. Su profundidad aumenta uniformemente de 4 a 9 pie en un tramo horizontal de 40 pie y después continúa al mismo nivel los 20 pie restantes, como se ilustra en la figura, la cual representa una sección transversal. La piscina se está llenando a razón de 500 gal/min de agua. Calcule aproximadamente la rapidez de cambio del nivel del agua en el momento en que la profundidad en la parte más honda es de 4 pie (1 gal ≈ 0.1337 pie^3).

EJERCICIO 30

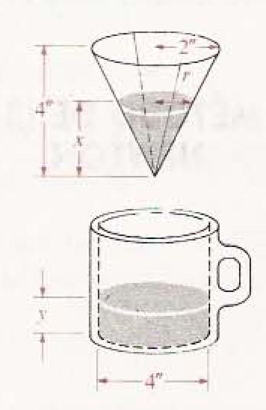
31. En la figura se muestran las posiciones relativas de una pista de aeropuerto y una torre de control de 20 pie de altura. El principio de la pista está a una distancia perpendicular de 300 pie de la base de la torre. Un avión alcanza una velocidad de 100 mi/h después de recorrer 300 pie sobre la pista. Calcule la rapidez de cambio de la distancia entre el avión y la cabina de la torre de control.

EJERCICIO 31



32. A través de un filtro de papel cónico escurre agua a una taza, como se muestra en la figura. Sea x la altura del agua en el filtro y y la altura del agua en la taza. Determine la relación entre dy/dt y dx/dt, cuando el filtro contiene 10 pulg^3 de agua.

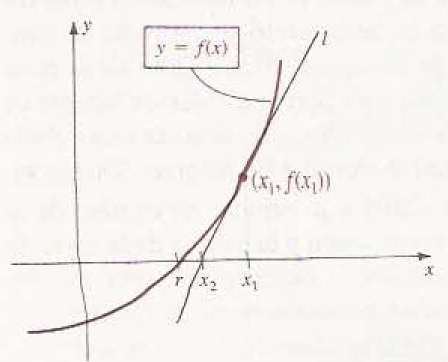
EJERCICIO 32



3.9 EL MÉTODO DE NEWTON

En esta sección se expone un método para calcular aproximadamente un cero real de una función derivable f, es decir, un número real r tal que $f(r) = 0$. Para usar el método se comienza tomando una primera aproximación x_1 al cero r. Como r es la abscisa de la intersección de la gráfica de f con el eje x, la aproximación x_1 se puede escoger observando un croquis de la gráfica de f. Sea l la recta tangente a la gráfica

FIGURA 3.22



de f en el punto $(x_1, f(x_1))$. Si x_1 está suficientemente cercano a r entonces, como se ilustra en la Figura 3.22, la abscisa x_2 de la intersección de l con el eje x debe ser una mejor aproximación a r.

Como la pendiente de l es $f'(x_1)$,

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

es una ecuación para la recta tangente. Como x_2 es la abscisa de la intersección con el eje x (o intercepción x), corresponde al punto $(x_2, 0)$ de l, se obtiene así

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

Si $f'(x_1) \neq 0$, esta ecuación es equivalente a

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Tomando x_2 como una segunda aproximación a r se puede repetir el proceso usando la recta tangente en $(x_2, f(x_2))$. Si $f'(x_2) \neq 0$, puede obtenerse una tercera aproximación x_3, dada por

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

El proceso se puede continuar hasta alcanzar el grado de precisión que se desee. Este método de aproximaciones sucesivas a los ceros reales se llama **Método de Newton**. A continuación se enuncia formalmente.

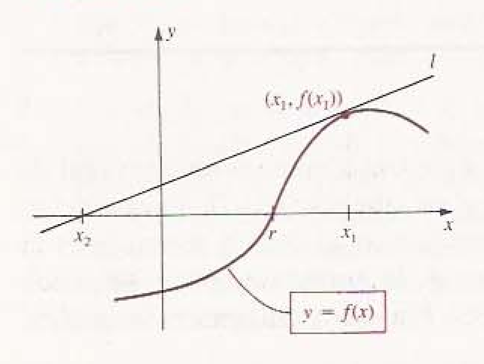
MÉTODO DE NEWTON (3.22)

Sea f una función derivable y sea r un cero real de f. Si x_n es una aproximación a r, entonces la siguiente aproximación x_{n+1} está dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

siempre y cuando $f'(x_n) \neq 0$.

FIGURA 3.23



El Método de Newton no garantiza que x_{n+1} sea una mejor aproximación a r que x_n para todo n. Se debe tener cuidado al elegir la primera aproximación x_1. Si x_1 no está suficientemente cerca de r, es posible que la segunda aproximación x_2 sea menos adecuada que x_1, como se ilustra en la Figura 3.23. Es evidente que no se debe elegir un número x_n para el cual $f'(x_n)$ sea casi cero porque entonces la recta tangente l es casi horizontal.

Al aplicar el Método de Newton usaremos la siguiente regla: Si se desea una aproximación de k cifras decimales calcularemos cada uno de los números $x_2, x_3, \ldots$ con una precisión de k cifras decimales, y se continuará el proceso hasta que dos aproximaciones consecutivas sean iguales. Esto se ilustra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 Estimar $\sqrt{7}$ con cinco cifras decimales, usando el Método de Newton.

Solución El problema equivale al de estimar el cero real positivo r de $f(x) = x^2 - 7$. En la Figura 3.24 se tiene la gráfica de f. Como $f(2) = -3$ y $f(3) = 2$, de la continuidad de f resulta que $2 < r < 3$. Más aún, como f es creciente en el intervalo $(2, 3)$, solamente puede haber un cero en él.

Si x_n es una aproximación a r, entonces por (3.32) la siguiente aproximación x_{n+1} está dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 7}{2x_n}.$$

FIGURA 3.24

$y = x^2 - 7$

Escojamos $x_1 = 2.5$ como una primera aproximación. Usando la fórmula para x_{n+1} con $n = 1$ obtenemos

$$x_2 = 2.5 - \frac{(2.5)^2 - 7}{2(2.5)} = 2.65000$$

Aplicando de nuevo la fórmula con $n = 2$ resulta la siguiente aproximación

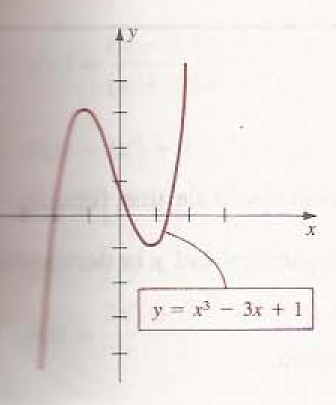
$$x_3 = 2.65000 - \frac{(2.65000)^2 - 7}{2(2.65000)} \approx 2.64575$$

Repitiendo el procedimiento (con $n = 3$),

$$x_4 = 2.64575 - \frac{(2.64575)^2 - 7}{2(2.64575)} \approx 2.64575$$

Como ya tenemos dos valores consecutivos de x_n que son iguales (con el grado de precisión deseado), se tiene que $\sqrt{7} \approx 2.64575$. Es posible demostrar que, con una precisión de nueve cifras decimales, $\sqrt{7} \approx 2.645751311$. •

FIGURA 3.25



EJEMPLO 2 Calcular la mayor raíz positiva real de $x^3 - 3x + 1 = 0$ con una precisión de cuatro cifras decimales.

Solución Si definimos $f(x) = x^3 - 3x + 1$, entonces el problema es equivalente a encontrar el mayor *cero* real positivo de f. La gráfica de f se tiene en la Figura 3.25. Obsérvese que f tiene tres ceros reales. Deseamos calcular el cero que se encuentra entre 1 y 2. Como $f'(x) = 3x^2 - 3$, la fórmula para x_{n+1} en el Método de Newton es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n + 1}{3x_n^2 - 3}.$$

Usando la gráfica tomamos como primera aproximación $x_1 = 1.5$ y se procede como sigue:

$$x_2 = 1.5 - \frac{(1.5)^3 - 3(1.5) + 1}{3(1.5)^2 - 3} \approx 1.5333$$

$$x_3 = 1.5333 - \frac{(1.5333)^3 - 3(1.5333) + 1}{3(1.5333)^2 - 3} \approx 1.5321$$

$$x_4 = 1.5321 - \frac{(1.5321)^3 - 3(1.5321) + 1}{3(1.5321)^2 - 3} \approx 1.5321$$

Por lo tanto, la aproximación deseada es 1.5321. Las otras dos raíces reales se pueden estimar de manera parecida (véase el Ejercicio 15). •

EJERCICIOS 3.9

Ejercicios 1-2: Utilice el Método de Newton para estimar el número dado con una precisión de cuatro cifras decimales.

1. $\sqrt[3]{2}$
2. $\sqrt[5]{3}$

Ejercicios 3-8: Use el Método de Newton para estimar la raíz real con una precisión de cuatro cifras decimales.

3. La raíz positiva de $x^3 + 5x - 3 = 0$.
4. La mayor raíz de $2x^3 - 4x^2 - 3x + 1 = 0$.
5. La raíz de $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$ que está entre 1 y 2.
6. La raíz de $x^4 - 5x^2 + 2x - 5 = 0$ que está entre 2 y 3.
7. La raíz de $x^5 + x^2 - 9x - 3 = 0$ que se halla entre −2 y −1.
8. La raíz de $x^5 + x^3 + 2x - 5 = 0$ que se halla entre 1 y 2.

Ejercicios 9-10: Estime el mayor cero de $f(x)$ con una precisión de cinco cifras decimales.

9. $f(x) = x^4 - 11x^2 - 44x - 24$
10. $f(x) = x^3 - 36x - 84$

Ejercicios 11-18: Utilice el Método de Newton para calcular todas las raíces reales con una precisión de dos cifras decimales.

11. $x^4 = 125$
12. $10x^2 - 1 = 0$
13. $x^4 - x - 2 = 0$
14. $x^5 - 2x^2 + 4 = 0$
15. $x^3 - 3x + 1 = 0$
16. $x^3 + 2x^2 - 8x - 3 = 0$
17. $x^4 - x^3 - 10x^2 - x + 1 = 0$
18. $4x^3 - 4x + 1 = 0$

3.10 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. La derivada de una función.
2. Función derivable.
3. Función derivable en un intervalo.
4. Derivada por la derecha de una función.
5. Derivada por la izquierda de una función.
6. Relación entre la continuidad y la derivabilidad de una función.
7. Regla de la Potencia.

8. Regla del Producto.

9. Regla del Cociente.

10. La derivada como una tasa de variación o razón de cambio.

11. La aceleración en el movimiento rectilíneo.

12. Aplicaciones de la derivada en economía y administración.

13. Notación de incrementos.

14. Diferenciales.

15. Error medio en una medición.

16. Error porcentual.

17. Regla de la Cadena.

18. Regla de la Potencia para Funciones.

19. Recta tangente a una gráfica.

20. Derivación implícita.

21. Derivadas de orden superior.

22. Rapideces de variación relacionadas.

23. Método de Newton.

EJERCICIOS 3.10

Ejercicios 1-2: Encuentre $f'(x)$ directamente a partir de la definición de derivada.

1. $f(x) = 4/(3x^2 + 2)$

2. $f(x) = \sqrt{5 - 7x}$

Ejercicios 3-30: Determine la primera derivada.

3. $f(x) = 2x^3 - 7x + 2$

4. $k(x) = \dfrac{1}{x^4 - x^2 + 1}$

5. $g(t) = \sqrt{6t + 5}$

6. $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{6t + 5}}$

7. $F(z) = \sqrt[3]{7z^2 - 4z + 3}$

8. $f(w) = \sqrt[5]{3w^2}$

9. $G(x) = \dfrac{6}{(3x^2 - 1)^4}$

10. $H(x) = \dfrac{(3x^2 - 1)^4}{6}$

11. $F(y) = (y^2 - y^{-2})^{-2}$

12. $h(z) = [(z^2 - 1)^5 - 1]^5$

13. $g(x) = \sqrt[5]{(3x + 2)^4}$

14. $P(x) = (x + x^{-1})^2$

15. $r(s) = \left(\dfrac{8s^2 - 4}{1 - 9s^3}\right)^4$

16. $g(w) = \dfrac{(w - 1)(w - 3)}{(w + 1)(w + 3)}$

17. $F(x) = (x^6 + 1)^5(3x + 2)^3$

18. $k(z) = [z^2 + (z^2 + 9)^{1/2}]^{1/2}$

19. $g(y) = (7y - 2)^{-2}(2y + 1)^{2/3}$

20. $p(x) = \dfrac{2x^4 + 3x^2 - 1}{x^2}$

21. $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)$

22. $H(t) = (t^6 + t^{-6})^6$

23. $h(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

24. $K(r) = \sqrt{r\sqrt{r + 1}\sqrt{r + 2}}$

25. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{2x + 3}}{\sqrt{3x + 2}}$

26. $f(x) = 6x^2 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$

27. $g(z) = (9z^{5/3} - 5z^{3/5})^3$

28. $F(t) = \dfrac{5t^2 - 7}{t^2 + 2}$

29. $k(s) = (2s^2 - 3s + 1)(9s - 1)^4$

30. $f(w) = \sqrt{(2w + 5)/(7w - 9)}$

Ejercicios 31-34: Evalúe y' suponiendo que la ecuación define una función derivable f tal que $y = f(x)$.

31. $5x^3 - 2x^2y^2 + 4y^3 - 7 = 0$

32. $3x^2 - xy^2 + y^{-1} = 1$

33. $\dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{y} + 1} = y$

34. $y^2 - \sqrt{xy} + 3x = 2$

Ejercicios 35-38: Encuentre ecuaciones para las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto P.

35. $y = 2x - \dfrac{4}{\sqrt{x}}$, $P(4, 6)$

36. $y = (x^3 + 2)^5$, $P(-1, 1)$

37. $x^2y - y^3 = 8$, $P(-3, 1)$

38. $x = y^{2/3}$, $P(0, 0)$

39. Calcule la abscisa de todos los puntos de la gráfica de $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$ en los que la recta tangente es perpendicular a la recta $4x + 2y = 5$.

40. Sea $y = 2x^3 - x^2 - 3x$. (a) Calcule la abscisa de todos los puntos de la gráfica en los que la recta tangente es horizontal. (b) Calcule la pendiente de la recta tangente en los puntos donde la gráfica corta al eje x.

Ejercicios 41-42: Evalúe y', y'' y y'''.

41. $y = 5x^3 + 4\sqrt{x}$ 42. $y = (1/x^2) + (1/x)$

43. Calcule y'' por derivación implícita suponiendo que $x^2 + 4xy - y^2 = 8$.

44. Sea $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$,
   (a) Halle la abscisa de todos los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente es paralela a la que pasa por $A(-3, 2)$ y $B(1, 14)$.
   (b) Halle el valor de f'' en cada uno de los ceros de f'.

45. Sea $f(x) = 1/(1 - x)$. Encuentre una fórmula para $f^{(n)}(x)$ para todo entero positivo n.

46. Sea $y = 5x/(x^2 + 1)$. Obtenga dy y úsela para estimar el incremento de y cuando x cambia de 2 a 1.98. ¿Cuál es el incremento exacto de y?

47. Se calcula que el lado de un triángulo equilátero es de 4 pulg con un error máximo de 0.03 pulg. Use diferenciales para estimar el error máximo en el cálculo del área del triángulo. Calcule el error porcentual.

48. Sean $s = 3r^2 - 2\sqrt{r + 1}$ y $r = t^3 + t^2 + 1$. Use la Regla de la Cadena para obtener el valor de ds/dt en $t = 1$.

49. Sean $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$ y $g(x) = x^5 + 4x^3 + 2x$. Use diferenciales para estimar el incremento de $g(f(x))$ cuando x varía de -1 a -1.01.

50. Utilice diferenciales para estimar $\sqrt[3]{64.2}$. (*Sugerencia:* Considere $y = \sqrt[3]{x}$.)

51. Suponga que f y g son funciones tales que $f(2) = -1$, $f'(2) = 4$, $f''(2) = -2$, $g(2) = -3$, $g'(2) = 2$ y $g''(2) = 1$. Calcule los valores de las siguientes funciones en $x = 2$.

(d) $(fg)''$ (e) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'$ (f) $\left(\dfrac{f}{g}\right)''$

52. La función de costo por la producción de un componente para un microprocesador está dada por $C(x) = 1000 + 2x + 0.005x^2$. Suponiendo que se fabrican 2000 unidades, calcule el costo, el costo medio, el costo marginal y el costo medio marginal.

53. Un fabricante de hornos de microondas determina que el costo de producir x unidades está dado por

$$C(x) = 4000 + 100x + 0.05x^2 + 0.0002x^3$$

Compare el costo marginal de producir 100 hornos con el costo en la producción del centésimo primero.

54. El volumen y el área de la superficie de un globo esférico se denotan por V y S, respectivamente. El diámetro es de 8 cm y el volumen aumenta en 12 cm³. Aplique diferenciales para estimar el incremento en S.

55. Según la ley de Stefan, la energía de radiación emitida por la superficie de un cuerpo está dada por $R = kT^4$, donde R es la emisión por unidad de área, T es la temperatura (en kelvins, °K) y k es una constante. Suponiendo que el error en la medición de T es 0.5%, evalúe el error porcentual correspondiente en el cálculo del valor de R.

56. La iluminación producida por una fuente de luz es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente. Un estudiante trabaja en un escritorio que está a cierta distancia de una lámpara. Use diferenciales para calcular el cambio porcentual en la distancia que aumentará la iluminación en 10%.

57. La función de posición de un punto que se mueve a lo largo de una recta coordenada está dada por $s(t) = (t^2 + 3t + 1)/(t^2 + 1)$. Calcule la velocidad y la aceleración al tiempo t y describa el movimiento del punto durante el intervalo de tiempo $[-2, 2]$.

58. Un punto $P(x, y)$ se mueve sobre la gráfica de $y^2 = 2x^3$ de manera que $dy/dt = x$ para el tiempo t. Calcule dx/dt en el punto $(2, 4)$.

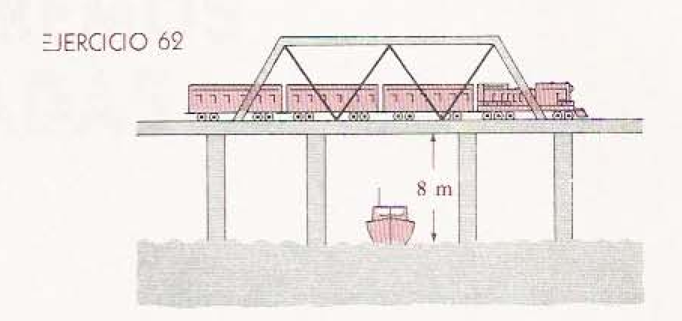
59. Los extremos de un abrevadero horizontal de 10 pie de largo son trapecios isósceles cuya base inferior mide 3 pie, la superior 5 pie y la altura es de 2 pie. El nivel de agua sube a razón de $\frac{1}{4}$ de pulgada por minuto cuando la profundidad es de 1 pie. ¿Qué cantidad de agua por minuto entra al abrevadero?

60. Dos automóviles A y B viajan hacia un cruce o intersección por carreteras perpendiculares. A se desplaza a 40 km/h, y B, a 80 km/h. En cierto momento A está a 400 m de la intersección y B a 800 m. Calcule la rapidez con que los automóviles se acercan en ese momento.

61. La ley de Boyle dice que $pv = c$, donde p es la presión, v el volumen y c es una constante. Obtenga una fórmula para la razón de cambio de p con respecto a v.

62. Un puente de ferrocarril pasa por arriba de un río a 8 m de él. Una persona a bordo de un tren que corre a 100 km/h pasa por el centro del puente en el momento en que otra pasa por debajo del centro del puente en una lancha de motor que va a 30 km/h (véase la figura). ¿A qué velocidad se alejan las dos personas 10 segundos después?

EJERCICIO 62



63. Utilice el Método de Newton para calcular la raíz de $7x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 7x - 5 = 0$ que se encuentra entre 0 y -1 con una precisión de cuatro cifras decimales.

64. Aplique el Método de Newton para estimar $\sqrt[3]{5}$ con una precisión de tres cifras decimales.

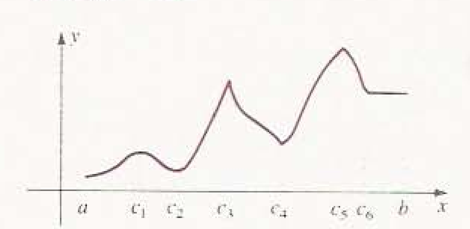
CAPÍTULO 4

VALORES EXTREMOS Y ANTIDERIVADAS

En este capítulo se usa la derivada para investigar los valores máximos y mínimos de las funciones, las aplicaciones de los valores extremos y los conceptos gráficos de ***concavidad*** *y* ***puntos de inflexión****. En la Sección 4.6 se discuten los límites infinitos, en particular los de las funciones racionales. En la última sección se presenta el concepto de* ***antiderivada*** *y se aplica a los problemas de movimiento.*

4.1 MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES DE LAS FUNCIONES

FIGURA 4.1



Supongamos que la gráfica de la Figura 4.1 fue trazada por cierto instrumento que mide y registra alguna cantidad física. El eje x representa el tiempo y las ordenadas representan las magnitudes de la cantidad física medida por el instrumento, que pueden ser la temperatura, resistencia en un circuito eléctrico, presión arterial de una persona, cantidad de alguna solución química o el número de bacterias en un cultivo.

La gráfica indica que la cantidad aumentó durante el intervalo de tiempo $[a, c_1]$, disminuyó durante $[c_1, c_2]$, aumentó durante $[c_2, c_3]$, etcétera. Si sólo se considera el intervalo $[c_1, c_4]$, se ve que la cantidad tuvo su mayor valor (o su máximo) en c_3 y su valor más pequeño (o mínimo) en c_2. En otros intervalos hubo diferentes máximos y mínimos. Por ejemplo, el máximo sobre todo el intervalo $[a, b]$ se da en c_5 y el mínimo en a.

La terminología que se usa para describir la variación de cantidades físicas se aplica también a las funciones.

DEFINICIÓN (4.1)

Sea f una función definida en un intervalo I y sean x_1, x_2 dos números que están en I.

(i) f es **creciente** en I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.

(ii) f es **decreciente** en I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.

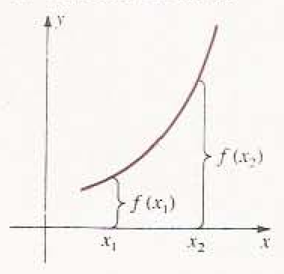
(iii) f es **constante** en I si $f(x_1) = f(x_2)$ para todo x_1 y x_2.

La Figura 4.2 ilustra gráficamente la Definición (4.1).

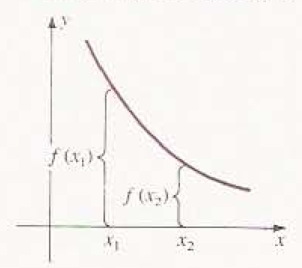
A lo largo del texto, las frases *f es creciente* y *f(x) es creciente* tienen el mismo significado. Lo mismo ocurre con el término *decreciente*. Si una función es creciente entonces su gráfica sube o asciende cuando x aumenta. Si una función es decreciente entonces su gráfica baja o desciende cuando x aumenta. Si la Figura 4.1 representa la gráfica de una función f, entonces f es creciente en los intervalos $[a, c_1]$, $[c_2, c_3]$ y

FIGURA 4.2

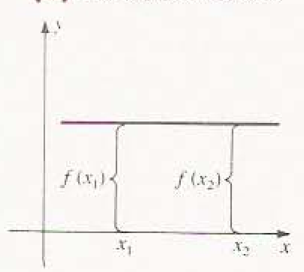
(i) Función creciente



(ii) Función decreciente



(iii) Función constante



$[c_4, c_5]$. Es decreciente en $[c_1, c_2]$, $[c_3, c_4]$ y $[c_5, c_6]$. La función es constante en el intervalo $[c_6, b]$.

La siguiente definición presenta la terminología que se usa para denotar los valores más grandes y los más pequeños de una función en un intervalo.

DEFINICIÓN (4.2)

Sea f una función definida en un intervalo I y sea c un número en I.

(i) $f(c)$ es el **máximo (o valor máximo)** de f en I si $f(x) \leq f(c)$ para todo x en I.

(ii) $f(c)$ es el **mínimo (o valor mínimo)** de f en I si $f(x) \geq f(c)$ para todo x en I.

Las Figuras 4.3 y 4.4 muestran un máximo y un mínimo. En ellas se representa I como un intervalo cerrado $[a, b]$, pero la Definición (4.2) puede aplicarse a cualquier intervalo. Aunque las gráficas que se muestran tienen tangentes horizontales en el punto $(c, f(c))$, los máximos y mínimos también pueden darse en puntos donde la gráfica tiene picos o saltos, o en los extremos del dominio de la función.

FIGURA 4.3

Valor máximo $f(c)$

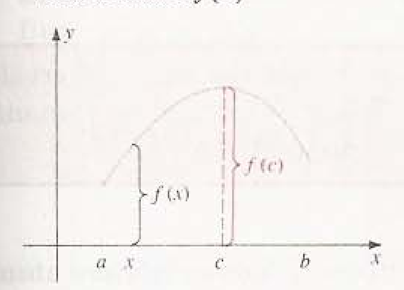
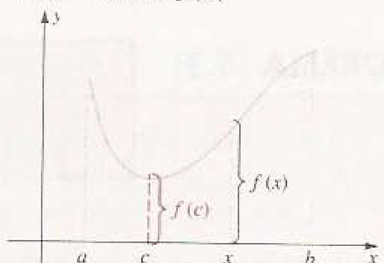


FIGURA 4.4

Valor mínimo $f(c)$

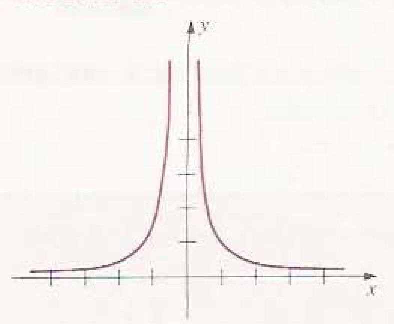


Si $f(c)$ es el máximo de f en I, se dice que f *alcanza* su máximo en c, y en ese caso, el punto $(c, f(c))$ es el punto más alto de la gráfica. Si $f(c)$ es el mínimo de f en I, se dice que f *alcanza* su mínimo en c, y en ese caso, $(c, f(c))$ es el punto más bajo de la gráfica. Los máximos y mínimos son los **valores extremos** de f. Una función puede alcanzar un máximo o un mínimo más de una vez. Si f es una función constante, entonces $f(c)$ es a la vez un máximo y un mínimo que f alcanza en *todo* número real c.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = 1/x^2$. Determinar si f es creciente o decreciente en los siguientes intervalos y encontrar sus máximos y mínimos en cada intervalo:

$$[1, 2] \quad (1, 2] \quad (1, 2) \quad (-2, -1] \quad [-1, 2]$$


FIGURA 4.5



Solución Por inspección de la gráfica de f mostrada en la Figura 4.5, obtenemos la siguiente tabla.

Intervalo	f	Máximo de f	Mínimo de f
$[1, 2]$	decreciente	$f(1) = 1$	$f(2) = \frac{1}{4}$
$(1, 2]$	decreciente	no tiene	$f(2) = \frac{1}{4}$
$(1, 2)$	decreciente	no tiene	no tiene
$(-2, -1]$	creciente	$f(-1) = 1$	no tiene
$[-1, 2]$	ni uno ni otro	no tiene	$f(2) = \frac{1}{4}$

Nótese que f no tiene un máximo en $(1, 2]$, pues si a es cualquier número en $(1, 2]$ y si $1 < c < a$, entonces $f(c) > f(a)$. En el intervalo abierto $(1, 2)$, f *no alcanza* un máximo ni un mínimo.

La función no es continua en $[-1, 2]$. Aunque f es creciente en $[-1, 0)$ y decreciente en $(0, 2]$, no se puede decir de f ninguna de las dos cosas en el intervalo $[-1, 2]$.

El ejemplo anterior muestra que la existencia de máximos y mínimos puede depender del tipo de intervalo y de la continuidad de la función. El siguiente teorema enuncia condiciones bajo las cuales una función alcanza un máximo y un mínimo en un intervalo. La demostración se puede consultar en textos de cálculo más avanzados.

TEOREMA (4.3)

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un mínimo y un máximo por lo menos una vez en $[a, b]$.

Los valores extremos de una función también se llaman **mínimo absoluto** y **máximo absoluto** de f en un intervalo. Los *máximos* y *mínimos locales* de una función también son importantes y se definen como sigue.

DEFINICIÓN (4.4)

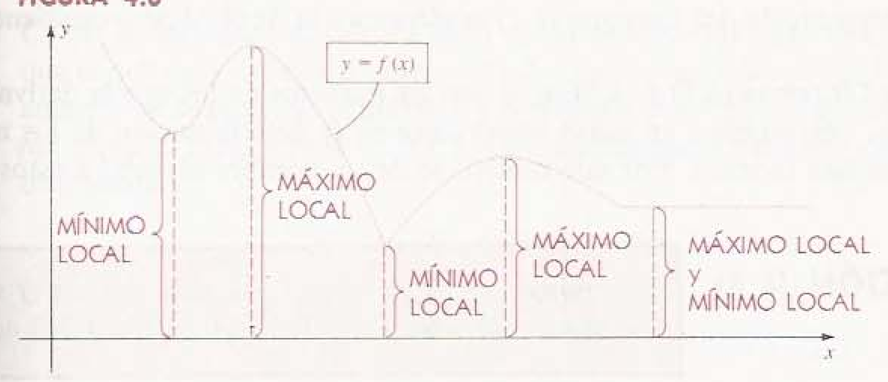
Sea c un número en el dominio de una función f.

(i) $f(c)$ es un **máximo local** de f si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo x en (a, b).

(ii) $f(c)$ es un **mínimo local** de f si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c tal que $f(x) \geq f(c)$ para todo x en (a, b).

La palabra *local* se refiere a que estos máximos y mínimos lo son en *relación con una región*, un intervalo abierto pequeño que contiene a c. Fuera de ese intervalo abier-

FIGURA 4.6



to f puede tomar valores mayores o menores. También se puede hablar de máximos y mínimos *relativos* en vez de *locales*. Los máximos o mínimos locales se denominan **valores extremos locales** de f. En la Figura 4.6 se ilustran varios ejemplos de valores extremos locales. Como se indica en la figura, un mínimo local puede ser *mayor* que un máximo local.

Los máximos y mínimos locales pueden no incluir entre ellos a los máximos y mínimos absolutos de f. Por ejemplo, en la Figura 4.1, $f(a)$ es el mínimo absoluto de f en $[a, b]$ pero no es un mínimo local ya que no existe un intervalo *abierto* I contenido en $[a, b]$ en el que $f(a)$ es el menor valor de f en I.

En los puntos correspondientes a los extremos locales de la función cuya gráfica aparece en la Figura 4.6, la recta tangente es horizontal, o bien la gráfica tiene un pico. Las abscisas de estos puntos son números en los que la derivada es cero o no existe. El siguiente teorema muestra que esto es cierto en general. La demostración se da al final de la sección.

TEOREMA (4.5)

Si una función f tiene un máximo local o un mínimo local en un número c de un intervalo abierto, entonces $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del Teorema (4.5).

COROLARIO (4.6)

Si $f'(c)$ existe y $f'(c) \neq 0$, entonces $f(c)$ no es ni un máximo local ni un mínimo local de la función f.

Hay un resultado similar al Teorema (4.5) para los máximos y mínimos *absolutos* de una función que es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que los alcanza en el intervalo *abierto* (a, b). Este resultado se enuncia como sigue.

TEOREMA (4.7)

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y alcanza su máximo o su mínimo en un número c del intervalo abierto (a, b), entonces $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.

La demostración del Teorema (4.7) es idéntica a la de (4.5) pero omitiendo la palabra *local*.

De los Teoremas (4.5) y (4.7) se ve que los números en los que la derivada es cero o no existe, desempeñan un papel importante en la determinación de los máximos y mínimos de una función. Por este motivo se da un nombre especial a estos números.

DEFINICIÓN (4.8)

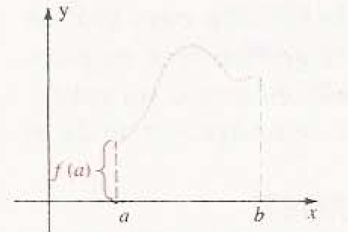
Un número c en el dominio de una función f se llama **número crítico** de f si $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.

De acuerdo con el Teorema (4.7), resulta que si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el máximo y el mínimo absolutos se alcanzan en un número crítico de f o en los extremos a o b del intervalo. Si $f(a)$ o $f(b)$ es un valor extremo absoluto de f en $[a, b]$, se llama **valor extremo en la frontera**. Los croquis de la Figura 4.7 ilustran este concepto.

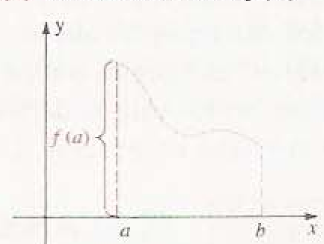
FIGURA 4.7

Valores extremos en la frontera de f sobre $[a, b]$

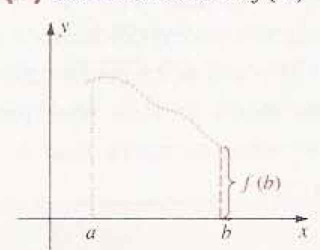
(i) Mínimo absoluto $f(a)$



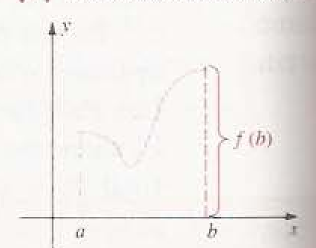
(ii) Máximo absoluto $f(a)$



(iii) Mínimo absoluto $f(b)$



(iv) Máximo absoluto $f(b)$



De la discusión anterior se obtiene lo siguiente:

GUÍA PARA DETERMINAR EL MÁXIMO Y EL MÍNIMO ABSOLUTOS DE UNA FUNCIÓN f EN UN INTERVALO CERRADO $[a, b]$ (4.9)

1. Encontrar todos los números críticos de f.
2. Calcular $f(c)$ para cada número crítico c.
3. Calcular $f(a)$ y $f(b)$.
4. El máximo y el mínimo absolutos de f en $[a, b]$ son, respectivamente, el mayor y el menor de los valores de la función determinados en los pasos 2 y 3.

EJEMPLO 2 Sea $f(x) = x^3 - 12x$. Calcular el máximo y el mínimo absolutos de f en el intervalo cerrado $[-3, 5]$. Trazar la gráfica de f.

Solución Siguiendo la Guía (4.9), comenzamos por encontrar los números críticos de f. Derivando,

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x + 2)(x - 2).$$

Como la derivada existe para todo x, los únicos números críticos son aquellos en los que la derivada es cero, a saber, -2 y 2. Como f es continua en $[-3, 5]$, de la discusión anterior se deduce que el máximo y el mínimo absolutos se encuentran entre los números $f(-2)$, $f(2)$, $f(-3)$ y $f(5)$. Calculando estos valores (pasos 2 y 3 de la guía) obtenemos

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) = -8 + 24 = 16$$
$$f(2) = 2^3 - 12(2) = 8 - 24 = -16$$
$$f(-3) = (-3)^3 - 12(-3) = -27 + 36 = 9$$
$$f(5) = 5^3 - 12(5) = 125 - 60 = 65$$

RA 4.8

$y = x^3 - 12x;\ -3 \le x \le 5$
MAXIMO ABSOLUTO $f(5) = 65$
MINIMO ABSOLUTO $f(2) = -16$

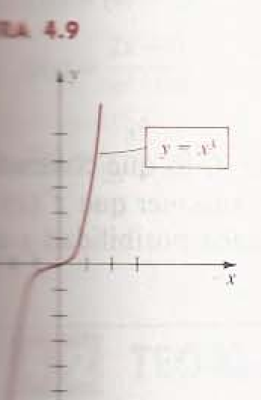
Por el paso 4 de la guía, el mínimo de f en $[-3, 5]$ es $f(2) = -16$ y el máximo es el valor extremo en la frontera $f(5) = 65$.

Usando los valores calculados de la función y trazando algunos puntos adicionales se obtiene el trazo de la Figura 4.8, en el que las escalas de los ejes x y y son diferentes. La recta tangente es horizontal en los puntos correspondientes a los números críticos -2 y 2. De lo que se verá en la Sección 4.4 puede deducirse que $f(-2) = 16$ es un máximo *local* de f, como se indica en la gráfica. •

A veces se hace referencia a los máximos y mínimos de manera incorrecta. Nótese que en el Ejemplo 2 el mínimo se da *en* $x = 2$ pero el mínimo *es* $f(2) = -16$. Cuando se pide calcular un mínimo (o un máximo) no basta encontrar el valor de x donde éste se alcanza: *Asegúrese de completar el problema calculando el valor de la función.*

Del Teorema (4.5) se ve que si una función tiene un valor extremo *local*, éste *debe* darse en un número crítico; sin embargo, no en cualquier número crítico se da un valor extremo local, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

A 4.9



EJEMPLO 3 Sea $f(x) = x^3$. Demostrar que f no tiene máximos y mínimos locales.

Solución En la Figura 4.9 aparece un croquis de la gráfica de f. La derivada es $f'(x) = 3x^2$, que existe para todo x y es cero solamente si $x = 0$. Por lo tanto, el único número crítico es 0. Sin embargo, $f(x)$ es negativa para $x < 0$ y $f(x)$ es positiva para $x > 0$. Por lo tanto, $f(0)$ no es un máximo local ni un mínimo local. Como los valores extremos locales *deben* darse en los números críticos (véase el Teorema (4.5)), resulta que f no tiene valores extremos locales. Nótese que la recta tangente en el punto $(0, 0)$ es horizontal y cruza ahí a la gráfica. •

EJEMPLO 4 Encontrar los números críticos de la función f dada por $f(x) = (x + 5)^2 \sqrt[3]{x - 4}$.

Solución Derivando $f(x) = (x + 5)^2(x - 4)^{1/3}$, obtenemos

$$f'(x) = (x + 5)^2 \tfrac{1}{3}(x - 4)^{-2/3} + 2(x + 5)(x - 4)^{1/3}.$$

Para encontrar los números críticos simplificamos $f'(x)$ como sigue:

$$f'(x) = \frac{(x + 5)^2}{3(x - 4)^{2/3}} + 2(x + 5)(x - 4)^{1/3} = \frac{(x + 5)^2 + 6(x + 5)(x - 4)}{3(x - 4)^{2/3}}$$

$$= \frac{(x + 5)[(x + 5) + 6(x - 4)]}{3(x - 4)^{2/3}} = \frac{(x + 5)(7x - 19)}{3(x - 4)^{2/3}}$$

Por lo tanto, $f'(x) = 0$ si $x = -5$ o bien $x = \frac{19}{7}$. La derivada $f'(x)$ no existe en $x = 4$. Entonces f tiene tres números críticos: -5, $\frac{19}{7}$ y 4. •

Demostración del Teorema (4.5) Sea c un número en el que f tiene un máximo o un mínimo local. Si $f'(c)$ no existe, no hay nada que demostrar. Si $f'(c)$ existe, entonces sucede una y sólo una de las tres posibilidades siguientes: (i) $f'(c) > 0$, (ii) $f'(c) < 0$ o bien (iii) $f'(c) = 0$. Se llegará a (iii) demostrando que (i) y (ii) no pueden ser ciertas. Supongamos que $f'(c) > 0$. Usando la Definición (3.1′),

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

y por el Teorema (2.12), existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c tal que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

para todo x en (a, b) diferente de c. Esta última desigualdad implica que si $a < x < b$ y $x \neq c$, entonces $f(x) - f(c)$ y $x - c$ son ambos positivos o ambos negativos es decir.

$$\begin{cases} f(x) - f(c) < 0 & \text{siempre que } x - c < 0, \quad \text{y} \\ f(x) - f(c) > 0 & \text{siempre que } x - c > 0. \end{cases}$$

Otra manera de enunciar esto es: Si x está en (a, b) y $x \neq c$, entonces

$$\begin{cases} f(x) < f(c) & \text{siempre que } x < c, \quad \text{y} \\ f(x) > f(c) & \text{siempre que } x > c. \end{cases}$$

Resulta que $f(c)$ no es un máximo local ni un mínimo local de f, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, (i) no puede ser cierta. Análogamente, suponer que $f'(c) < 0$ lleva a una contradicción. De donde, por fuerza, (iii) es la única posibilidad y con esto el teorema queda demostrado. • •

EJERCICIOS 4.1

Ejercicios 1-4: Calcule el máximo y el mínimo absolutos de f en los intervalos indicados.

1. $f(x) = 5 - 6x^2 - 2x^3$, $[-3, 1]$
2. $f(x) = 3x^2 - 10x + 7$, $[-1, 3]$
3. $f(x) = 1 - x^{2/3}$, $[-1, 8]$
4. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, $[0, 2]$

5. (a) Sea $f(x) = x^{1/3}$. Demuestre que el único número crítico de f es 0 y que $f(0)$ no es un valor extremo local.
(b) Sea $f(x) = x^{2/3}$. Demuestre que el único número crítico de f es 0 y que $f(0)$ es un mínimo local de f.

6. Sea $f(x) = |x|$. Demuestre que el único número crítico de f es 0, que $f(0)$ es un mínimo local de f y que la gráfica de f no tiene recta tangente en el punto (0, 0).

Ejercicios 7-8: Demuestre que f no tiene máximos ni mínimos locales. Trace la gráfica de f. Demuestre que f es continua en el intervalo (0, 1) pero no tiene máximo ni mínimo en (0, 1). ¿Por qué esto no contradice el Teorema (4.3)?

7. $f(x) = x^3 + 1$ 8. $f(x) = 1/x^2$

Ejercicios 9-26: Encuentre los números críticos de la función.

9. $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$
10. $g(x) = 2x + 5$
11. $s(t) = 2t^3 + t^2 - 20t + 4$
12. $K(z) = 4z^3 + 5z^2 - 42z + 7$
13. $F(w) = w^4 - 32w$
14. $k(r) = r^5 - 2r^3 + r - 12$
15. $f(z) = \sqrt{z^2 - 16}$
16. $M(x) = \sqrt[3]{x^2 - x - 2}$
17. $g(t) = t^2\sqrt[3]{2t - 5}$
18. $T(v) = (4v + 1)\sqrt{v^2 - 16}$
19. $G(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 9}$
20. $f(s) = \dfrac{s^2}{5s + 4}$
21. $f(t) = (t^3 - 9t)^3$
22. $g(x) = x^3 + (6/x)$
23. $F(x) = x^{2/3}(x^2 - 9)$
24. $H(u) = u^{1/3}(5u - 2)$
25. $f(x) = (x + 5)^4(2x - 3)^3$
26. $G(r) = (r - 1)^2(1 - 6r)^{2/3}$

27. Demuestre que un polinomio de grado 1 no tiene máximos ni mínimos absolutos en el intervalo $(-\infty, \infty)$. ¿Qué se puede decir de los máximos y mínimos en un intervalo cerrado $[a, b]$?

28. Demuestre que si f es una función constante y (a, b) es cualquier intervalo abierto, entonces para todo número c de (a, b) se tiene que $f(c)$ es a la vez un valor extremo local y absoluto de f.

29. Sea f la función mayor entero. Demuestre que todos los números reales son números críticos de f.

30. Sea f una función definida por las siguientes condiciones: $f(x) = 0$ si x es racional y $f(x) = 1$ si x es irracional. Demuestre que todos los números reales son números críticos de f.

31. Demuestre que una función cuadrática tiene uno y sólo un número crítico en $(-\infty, \infty)$.

32. Demuestre que un polinomio de grado 3 puede tener dos números críticos o uno o ninguno en $(-\infty, \infty)$. Trace gráficas que ilustren cómo puede darse cada una de estas posibilidades.

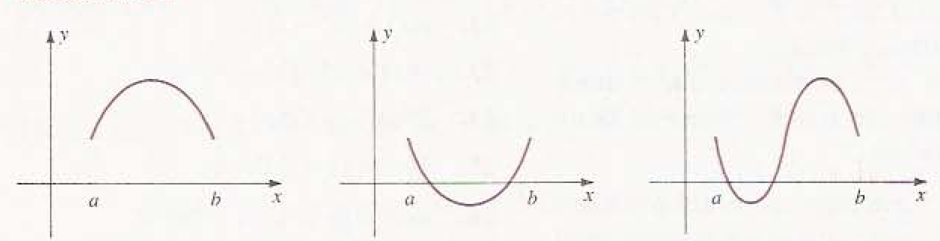
33. Sea $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo. Demuestre que f tiene un valor extremo local en $(-\infty, \infty)$ si n es par, y no tiene ninguno si n es impar. Trace una gráfica típica que ilustre cada caso.

34. Pruebe que un polinomio de grado n puede tener a lo más $n - 1$ valores extremos locales en $(-\infty, \infty)$.

4.2 TEOREMA DE ROLLE Y TEOREMA DEL VALOR MEDIO

A veces puede ser muy difícil determinar los números críticos de una función. De hecho, no siempre hay números críticos. El siguiente teorema, que se atribuye al matemático francés Michel Rolle (1652-1719), da condiciones suficientes para la existencia de un número crítico. El teorema se enuncia para una función f que es continua en un

FIGURA 4.10



intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$. La Figura 4.10 muestra las gráficas de algunas funciones de este tipo.

Al examinar las gráficas de la Figura 4.10, parece razonable esperar que haya al menos un número c entre a y b tal que la recta tangente en el punto $(c, f(c))$ sea horizontal o, equivalentemente, que $f'(c) = 0$. Ésta es precisamente la conclusión del siguiente teorema.

TEOREMA DE ROLLE (4.10)

> Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Demostración La función f debe satisfacer al menos una de las tres condiciones siguientes:

(i) *$f(x) = f(a)$ para todo x en (a, b)*. En este caso f es una función constante y entonces $f'(x) = 0$ para todo x. Por lo tanto, *todo* número c en (a, b) es un número crítico.

(ii) *$f(x) > f(a)$ para algún x en (a, b)*. En este caso el máximo de f en $[a, b]$ es mayor que $f(a)$ o $f(b)$ y por lo tanto, se alcanza en algún número c del intervalo *abierto* (a, b). Como la derivada existe en todo (a, b), del Teorema (4.7) se deduce que $f'(c) = 0$.

(iii) *$f(x) < f(a)$ para algún x en (a, b)*. En este caso, el mínimo de f en $[a, b]$ es menor que $f(a)$ o $f(b)$ y se alcanza en algún número c de (a, b). Como en (ii), $f'(c) = 0$.

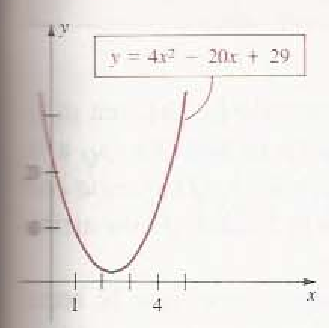
COROLARIO (4.11)

> Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) = f(b)$, entonces f tiene al menos un número crítico en el intervalo abierto (a, b).

Demostración . Si f' no existe en algún número c de (a, b), entonces, por la Definición (4.8), c es un número crítico. Por otro lado, si f' existe en todo (a, b), entonces, por el Teorema de Rolle, también existe algún número crítico. • •

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = 4x^2 - 20x + 29$. Demostrar que f satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[1, 4]$ y encontrar todos los números reales c en el intervalo abierto $(1, 4)$ tales que $f'(c) = 0$.

FIGURA 4.11



Solución Como f es un polinomio, es también una función continua y derivable para todo x. En particular, es continua en $[1, 4]$ y derivable en $(1, 4)$. Además,

$$f(1) = 4 - 20 + 29 = 13$$

$$f(4) = 64 - 80 + 29 = 13$$

y por lo tanto, $f(1) = f(4)$. Entonces f satisface las hipótesis del Teorema de Rolle en $[1, 4]$.

Derivando,

$$f'(x) = 8x - 20.$$

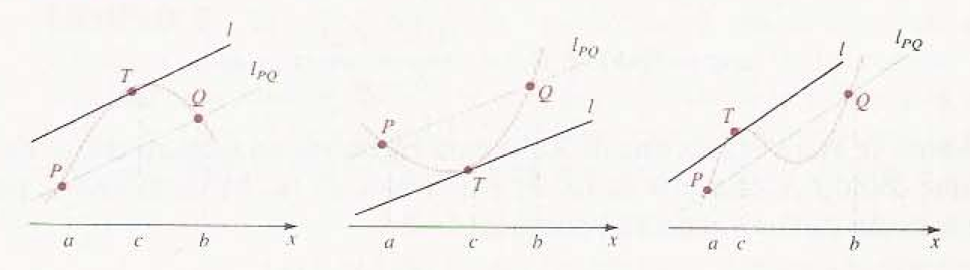
Resolviendo $f'(x) = 0$ obtenemos $8x = 20$ o bien $x = \frac{5}{2}$. Por lo tanto,

$$f'(\tfrac{5}{2}) = 0 \quad \text{y} \quad 1 < \tfrac{5}{2} < 4.$$

La gráfica de f (una parábola) se tiene en la Figura 4.11. Como $f'(\frac{5}{2}) = 0$, la recta tangente en el vértice $(\frac{5}{2}, 4)$ es horizontal. •

El Teorema de Rolle se puede generalizar al caso en que $f(a) \neq f(b)$. Consideremos los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$ en las gráficas de f que se ilustran en la Figura 4.12.

FIGURA 4.12



Si f' existe en todo el intervalo abierto (a, b), existe al menos un punto $T(c, f(c))$ de la gráfica en el que la recta tangente l es paralela a la recta secante l_{PQ} que pasa por P y Q. En términos de las pendientes,

$$\text{pendiente de } l = \text{pendiente de } l_{PQ}$$

o bien

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

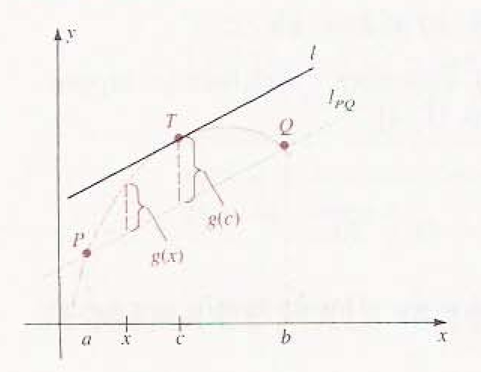
Multiplicando ambos lados de esta ecuación por $b - a$ se obtiene la fórmula del siguiente teorema.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO (4.12)

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

FIGURA 4.13



Demostración Para todo x en el intervalo $[a, b]$, sea $g(x)$ la distancia vertical (con signo) de la recta secante l_{PQ} a la gráfica de f, como se ilustra en la Figura 4.13. (*Distancia con signo* significa que $g(x)$ es positiva si la gráfica de f está arriba de l_{PQ}, y negativa si está abajo.)

Se ve que si $T(c, f(c))$ es un punto en el que la recta tangente l es paralela a l_{PQ}, entonces la distancia $g(c)$ es un valor extremo local de g. Esto sugiere buscar los números críticos de la función g.

Se puede obtener una fórmula para $g(x)$ como sigue. Primero, de la Forma de Punto y Pendiente (1.15), se tiene que

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

o, equivalentemente,

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

es una ecuación para la recta secante l_{PQ}. Como se ilustra en la Figura 4.13, $g(x)$ es la diferencia de las distancias del eje x a la gráfica de f y a la recta l_{PQ}, es decir,

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right].$$

Ahora se usará el Teorema de Rolle para encontrar un número crítico de g. Obsérvese que como f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), lo mismo se puede decir de la función g. Derivando se obtiene

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ahora, por sustitución directa, se ve que $g(a) = g(b) = 0$ y entonces la función g satisface las hipótesis del Teorema de Rolle. Por lo tanto, existe un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que $g'(c) = 0$ o, equivalentemente,

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Esta última ecuación se puede escribir en la forma de la conclusión del teorema. • •

El Teorema del Valor Medio, llamado también **Teorema de la Media**, se utilizará más adelante para demostrar varios resultados importantes.

EJEMPLO 2 Sea $f(x) = x^3 - 8x - 5$. Demostrar que f satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[1, 4]$ y encontrar un número c en el intervalo abierto $(1, 4)$ que satisfaga la conclusión del teorema.

Solución Como f es un polinomio, también es una función continua y derivable en todos los números reales. En particular, es continua en $[1, 4]$ y derivable en el intervalo abierto $(1, 4)$. De acuerdo con el Teorema del Valor Medio, existe un número c en $(1, 4)$ tal que

$$f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1).$$

Como $f(4) = 27$, $f(1) = -12$ y $f'(x) = 3x^2 - 8$, esto equivale a

$$27 - (-12) = (3c^2 - 8)(3) \qquad \text{o sea} \qquad 39 = 3(3c^2 - 8).$$

Se deja al lector demostrar que la última ecuación implica que $c = \pm\sqrt{7}$. Por lo tanto, el número buscado en el intervalo $(1, 4)$ es $c = \sqrt{7}$. •

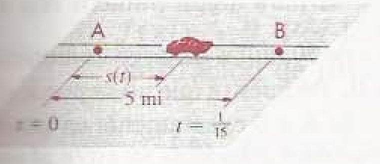
En estadística, *media* es nombre dado al *promedio* de un conjunto de números. Esta palabra tiene una connotación parecida en *Teorema del Valor Medio*. Por ejemplo, si un punto P se mueve sobre una recta coordenada y $s(t)$ denota su coordenada en el tiempo t entonces, por la Definición (2.4), la velocidad media de P en el intervalo $[a, b]$ es

$$v_{\text{med}} = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$

El Teorema del Valor Medio dice que esta velocidad media es igual a la velocidad $v'(c)$ para algún tiempo c entre a y b.

EJEMPLO 3 El velocímetro de un automóvil señala 80 km/h al pasar por una marca en una carretera. Cuatro minutos (4 min) más tarde, cuando el automóvil pasa otra marca de kilometraje que se encuentra a 8 km de la primera, el velocímetro indica 90 km/h. Usar el Teorema del Valor Medio para demostrar que el automóvil excedió una velocidad de 110 km/h en algún momento cuando viajaba entre las dos marcas.

FIGURA 4.14



Solución Podemos suponer que el vehículo va a lo largo de una carretera recta y que las marcas se encuentran en los puntos A y B, como se ilustra en la Figura 4.14. Denotemos por t el tiempo transcurrido (en horas) desde que el automóvil pasa por A y denotemos por $s(t)$ su distancia (en kilómetros) a A en el tiempo t. Como el auto pasa por B en $t = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$ horas, la velocidad media durante el trayecto entre A y B es

$$v_{\text{med}} = \frac{s(1/15) - s(0)}{(1/15) - 0} = \frac{8}{(1/15)} = 120 \text{ km/h}.$$

Si suponemos que s es una función derivable, entonces aplicando a s el Teorema del Valor Medio (4.12), con $a = 0$ y $b = \frac{1}{15}$, resulta que hay un tiempo c en el intervalo

$[0, \frac{1}{15}]$ en el que la velocidad $s'(c)$ del automóvil es de 110 km/h. Nótese que las veloci-dades en A y B no desempeñan ningún papel. •

EJERCICIOS 4.2

1. Sea $f(x) = |x|$. Demuestre que $f(-1) = f(1)$ pero $f'(c) \neq 0$ para todo número c en el intervalo abierto $(-1, 1)$. ¿Por qué esto no contradice el Teorema de Rolle?

2. Sea $f(x) = 5 + 3(x-1)^{2/3}$. Demuestre que aunque $f(0) = f(2)$, $f'(c) \neq 0$ para todo número c en el intervalo abierto $(0, 2)$. ¿Por qué esto no contradice el Teorema de Rolle?

3. Sea $f(x) = 4/x$. Demuestre que no existe ningún número c tal que $f(4) - f(-1) = f'(c)[4-(-1)]$. ¿Por qué esto no contradice el Teorema del Valor Medio aplicado al intervalo $[-1, 4]$?

4. Sean f la función mayor entero y a y b dos números reales tales que $b - a \geq 1$. Demuestre que no existe ningún número c tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. ¿Por qué esto no contradice el Teorema del Valor Medio?

Ejercicios 5-8: Demuestre que f satisface las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[a, b]$ y encuentre todos los números c en (a, b) para los que $f'(c) = 0$.

5. $f(x) = 3x^2 - 12x + 11, \; [0, 4]$
6. $f(x) = 5 - 12x - 2x^2, \; [-7, 1]$
7. $f(x) = x^4 + 4x^2 + 1, \; [-3, 3]$
8. $f(x) = x^3 - x, \; [-1, 1]$

Ejercicios 9-18: Determine si la función f satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[a, b]$. Si es así, encuentre todos los números c en (a, b) para los que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

9. $f(x) = x^3 + 1, \; [-2, 4]$
10. $f(x) = 5x^2 - 3x + 1, \; [1, 3]$
11. $f(x) = x + (4/x), \; [1, 4]$
12. $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 15x, \; [-1, 1]$
13. $f(x) = x^{2/3}, \; [-8, 8]$
14. $f(x) = 1/(x-1)^2, \; [0, 2]$
15. $f(x) = 4 + \sqrt{x-1}, \; [1, 5]$
16. $f(x) = 1 - 3x^{1/3}, \; [-8, -1]$
17. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3, \; [-1, 1]$
18. $f(x) = |x - 3|, \; [-1, 4]$

19. Demuestre que si f es una función lineal entonces f satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ y que *cualquier* número c satisface la conclusión del teorema.

20. Sea f una función cuadrática y $[a, b]$ un intervalo cerrado arbitrario. Demuestre que existe solamente un número c en el intervalo (a, b) que satisface la conclusión del Teorema del Valor Medio.

21. Demuestre que si f es un polinomio de grado 3 y $[a, b]$ es un intervalo cerrado arbitrario, entonces hay a lo más dos números en (a, b) que satisfacen la conclusión del Teorema del Valor Medio. Trace gráficas que ilustren las diversas posibilidades. Generalice este resultado a polinomios de grado 4 e ilústrelo con esquemas. Generalice el resultado para polinomios de cualquier grado n, donde n es un entero positivo.

22. Sea $f(x)$ un polinomio de grado 3. Utilice el Teorema de Rolle para demostrar que f tiene a lo más tres raíces reales. Generalice este resultado para polinomios de grado n.

Ejercicios 23-29: Use el Teorema del Valor Medio para cada una de las demostraciones.

23. Demuestre que si f es continua en $[a, b]$ y $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b), entonces $f(x) = k$ para algún número real k.

24. Demuestre que si f es continua en $[a, b]$ y $f'(x) = c$ para todo x en (a, b), entonces $f(x) = cx + d$ para algún número real d.

25. Una carretera de 50 millas de largo comunica dos ciudades A y B. Demuestre que no se puede viajar en automóvil de A a B exactamente en una hora sin que el velocímetro marque 50 mi/h al menos una vez.

26. Sea T la temperatura (en °F) al tiempo t (en horas). Si la temperatura disminuye, entonces dT/dt es la *tasa* (o *rapidez*) *de enfriamiento*. La mayor variación de temperatura durante un pe-

riodo de 12 horas que se ha registrado documentalmente en Estados Unidos, ocurrió en el estado de Montana en 1916, cuando la temperatura bajó de 44°F a −56°F. Demuestre que la tasa o rapidez de enfriamiento excedió −8°F/h en algún momento durante el periodo del cambio.

27. Si W es el peso (en libras) de una persona y t el tiempo (en meses), entonces dW/dt es la rapidez de ganancia o pérdida de peso (en lb/mes). El récord mundial de rapidez de pérdida de peso corresponde a un cambio de 487 lb a 130 lb en un periodo de ocho meses. Demuestre que la tasa de pérdida de peso excedió 44 lb/mes en algún momento durante dicho periodo.

28. La carga eléctrica Q de un capacitor (o condensador) aumenta de 2 mC (milicoulombs) a 10 mC en 15 ms (milisegundos). Demuestre que la corriente $I = dQ/dt$ pasa de 0.5 A (ampere) en algún momento durante este pequeño intervalo de tiempo. (*Nota:* 1 A = 1 C/s.)

29. Demuestre que $\sqrt{1+h} < 1 + \frac{1}{2}h$ para $h > 0$.

4.3 CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

El siguiente teorema muestra cómo puede usarse la derivada para determinar los intervalos en los que una función es creciente o decreciente.

TEOREMA (4.13)

Sea f una función que es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b).

(i) Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$.

(ii) Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces f es decreciente en $[a, b]$.

Demostración Para demostrar (i), supongamos que $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b). Sean x_1 y x_2 dos números en $[a, b]$ tales que $x_1 < x_2$. Hay que demostrar que $f(x_1) < f(x_2)$. Aplicando el Teorema del Valor Medio (4.12) en el intervalo $[x_1, x_2]$,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(w)(x_2 - x_1)$$

para algún número w en el intervalo abierto (x_1, x_2). Como $x_2 - x_1 > 0$ y por hipótesis $f'(w) > 0$, el lado derecho de la ecuación anterior es positivo, es decir, $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Por lo tanto $f(x_2) > f(x_1)$, que es lo que había que demostrar. La demostración de (ii) es parecida y se deja como ejercicio. • •

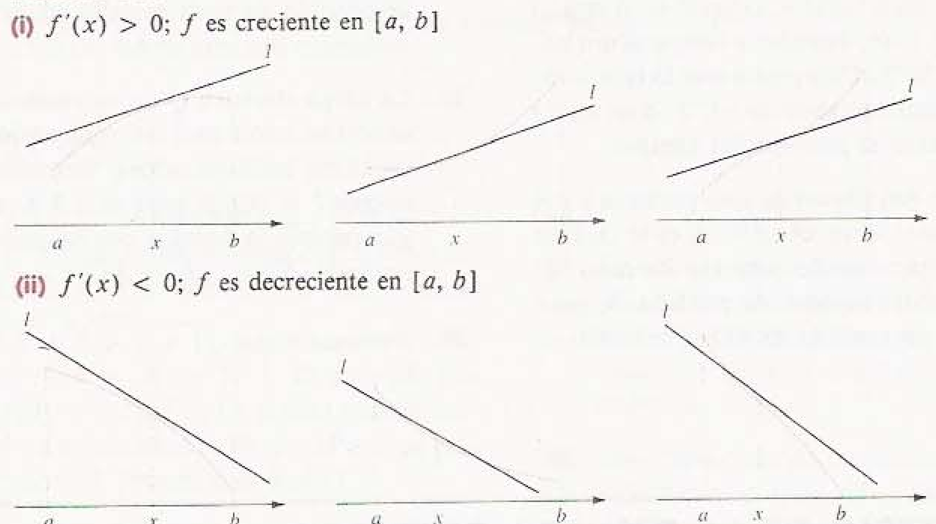
Las gráficas de la Figura 4.15 ilustran el Teorema (4.13). Si $f'(x) > 0$, la recta tangente l asciende y también la gráfica de f. Si $f'(x) < 0$, tanto la tangente como la gráfica descienden.

También se puede demostrar que si $f'(x) > 0$ en todo un intervalo infinito $(-\infty, a)$ o bien (b, ∞), entonces f es creciente en $(-\infty, a]$ o $[b, \infty)$, respectivamente, siempre

FIGURA 4.15

(i) $f'(x) > 0$; f es creciente en $[a, b]$

(ii) $f'(x) < 0$; f es decreciente en $[a, b]$



y cuando f sea continua en estos intervalos. Se tiene así un resultado análogo para fun-ciones decrecientes cuando $f'(x) < 0$.

Para aplicar el Teorema (4.13), hay que encontrar los intervalos en los que $f'(x)$ es siempre positiva o siempre negativa. El Teorema (2.29) es útil para esto. En efecto, si la *derivada* f' es continua en un intervalo y no tiene ceros en él, entonces $f'(x) > 0$ o bien $f'(x) < 0$ para todo x en el intervalo. Por lo tanto, si se escoge *cualquier* número k en el intervalo y si se tiene que $f'(k) > 0$, entonces $f'(x) > 0$ para *todo* x en el intervalo. Análogamente, si $f'(k) < 0$, entonces $f'(x) < 0$ en todo el intervalo. Recuerde que $f'(k)$ es un *valor de prueba* de $f'(x)$ para el intervalo.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$. Encontrar los intervalos en los que f es creciente y aquéllos en los que f es decreciente. Trazar la gráfica de f.

Solución Derivando,

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = (3x + 5)(x - 1).$$

Gracias al Teorema (4.13), basta encontrar los intervalos en los que $f'(x) > 0$ y también aquéllos en los que $f'(x) < 0$. La expresión factorizada de $f'(x)$ y los números críticos $-\frac{5}{3}$ y 1 sugieren los intervalos $(-\infty, -\frac{5}{3})$, $(-\frac{5}{3}, 1)$ y $(1, \infty)$. En cada uno de estos intervalos f' es continua y no tiene ceros. Por lo tanto $f'(x)$ mantiene el mismo signo en todo el intervalo. El signo se puede determinar escogiendo un valor de prueba adecuado para el intervalo.

Escogiendo -2 en el intervalo $(-\infty, -\frac{5}{3})$, obtenemos el valor de prueba

$$f'(-2) = 3(-2)^2 + 2(-2) - 5 = 12 - 4 - 5 = 3.$$

Como 3 es positivo, $f'(x)$ es positivo en todo $(-\infty, -\frac{5}{3})$.

Eligiendo 0 en $(-\frac{5}{3}, 1)$, se obtiene el valor de prueba

$$f'(0) = 3(0)^2 + 2(0) - 5 = -5.$$

Como -5 es negativo, $f'(x) < 0$ en el intervalo $(-\frac{5}{3}, 1)$.

Finalmente, tomando 2 en $(1, \infty)$, obtenemos

$$f'(2) = 3(2)^2 + 2(2) - 5 = 12 + 4 - 5 = 11.$$

Como 11 es positivo, $f'(x) > 0$ en todo el intervalo $(1, \infty)$.

A partir de ahora se exhibirán los resultados del análisis en una tabla como la siguiente. El último renglón se deduce del Teorema (4.13).

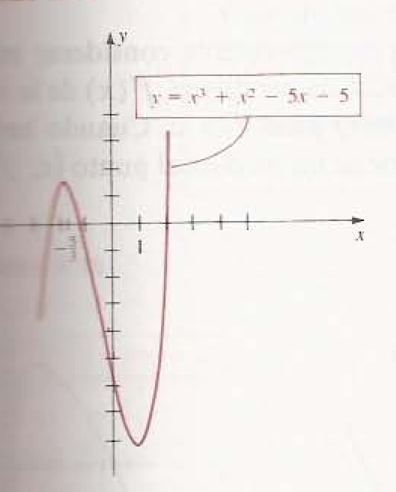
Intervalo	$(-\infty, -\frac{5}{3})$	$(-\frac{5}{3}, 1)$	$(1, \infty)$
k	-2	0	2
Valor de prueba $f'(k)$	3	-5	11
Signo de $f(x)$	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	creciente en $(-\infty, -\frac{5}{3}]$	decreciente en $[-\frac{5}{3}, 1]$	creciente en $[1, \infty)$

Nótese que

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x^2 - 5x - 5 \\ &= x^2(x + 1) - 5(x + 1) \\ &= (x^2 - 5)(x + 1) \end{aligned}$$

y por lo tanto las intercepciones x de la gráfica son $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$ y -1. La intercepción y es $f(0) = -5$. Los puntos correspondientes a los números críticos son $(-\frac{5}{3}, \frac{40}{27})$ y $(1, -8)$. Situando estos seis puntos y usando la información de la tabla se puede trazar el croquis de la Figura 4.16. •


4.16



El Teorema (4.13) sirve para justificar los resultados acerca de la dirección (o sentido) del movimiento que se usaron anteriormente (véase el Ejemplo 2 de la Sección 3.3). Así, si $s(t)$ es la coordenada de un punto P en una recta coordenada al tiempo t y si la velocidad $v(t)$ es positiva en un intervalo de tiempo I, entonces $s'(t) > 0$ y por lo tanto, por el Teorema (4.13), $s(t)$ es creciente, es decir, P se mueve según el sentido positivo. Análogamente, si $v(t)$ es negativa, P se mueve según el sentido negativo.

Como $v(t) = s'(t)$, los tiempos en los que la velocidad es cero son números críticos para la función de posición s y, por lo tanto, pueden dar máximos y mínimos locales de s. Si hay un máximo o un mínimo local de s en t_1, entonces frecuentemente t_1 es un tiempo en el que P cambia de dirección.

En la Sección 4.1 se vio que si una función tiene un valor extremo local, éste debe darse en un número crítico, pero no todo número crítico corresponde a un valor extremo local (véase el Ejemplo 3 de la Sección 4.1). Para calcular los máximos y mínimos locales, se comienza por localizar todos los números críticos de la función. Luego se prueba cada número crítico para ver si corresponde a un valor extremo local. Hay varios métodos para realizar estas pruebas. El que proporciona el siguiente teorema se

basa en el signo de la primera derivada de f. En el enunciado del teorema, la frase f' *cambia de positiva a negativa en c* significa que hay un intervalo abierto (a, b) que contiene a c tal que $f'(x) > 0$ si $a < x < c$ y también $f'(x) < 0$ si $c < x < b$. La frase *f' cambia de negativa a positiva en c* tiene un significado análogo.

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA (4.14)

Sea f una función que es continua en un número crítico c y derivable en un intervalo abierto I que contiene a c, excepto posiblemente en c mismo.

(i) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces $f(c)$ es un máximo local de f.

(ii) Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces $f(c)$ es un mínimo local de f.

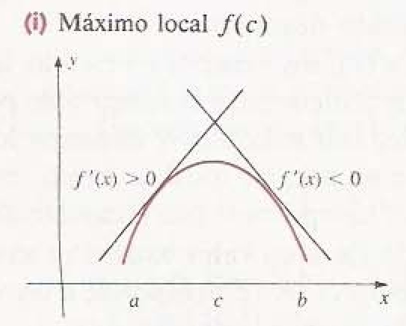
(iii) Si $f'(x) > 0$ o bien si $f'(x) < 0$ para todo x en I, excepto para $x = c$, entonces $f(c)$ no es un valor extremo local de f.

Demostración Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c tal que $f'(x) > 0$ para $a < x < c$ y también $f'(x) < 0$ para $c < x < b$. Además, se puede escoger (a, b) de manera que f sea continua en $[a, b]$. Entonces por el Teorema (4.13), f es creciente en $[a, c]$ y decreciente en $[c, b]$. Por lo tanto, $f(x) < f(c)$ para todo x en (a, b) diferente de c; es decir, $f(c)$ es un máximo local de f. Esto demuestra (i). Las demostraciones de (ii) y (iii) son similares. • •

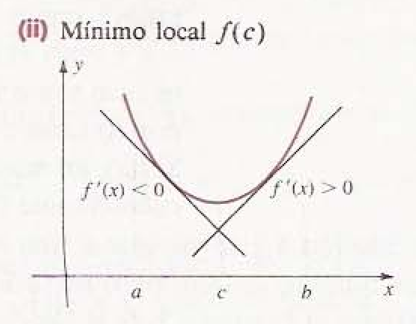
Para recordar el criterio de la primera derivada es conveniente considerar en las gráficas de la Figura 4.17. Cuando hay un máximo local, la pendiente $f'(x)$ de la recta tangente en $P(x, f(x))$ es positiva para $x < c$ y negativa para $x > c$. Cuando hay un mínimo local ocurre lo contrario. Cuando la gráfica tiene un pico en el punto $(c, f(c))$ se pueden trazar unas gráficas parecidas.

FIGURA 4.17

(i) Máximo local $f(c)$



(ii) Mínimo local $f(c)$



EJEMPLO 2 Calcular los valores extremos locales de la función f dada por $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$.

Solución Esta función es la misma que se consideró en el Ejemplo 1. Sus números críticos son $-\frac{5}{3}$ y 1. De la tabla en el Ejemplo 1 se ve que el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo cuando x rebasa $-\frac{5}{3}$. Entonces por el Criterio de la Primera Derivada, f tiene un máximo local en $-\frac{5}{3}$. El valor de este máximo es $f(-\frac{5}{3}) = \frac{40}{27}$ (véase la Figura 4.16).

Hay un mínimo local en 1 porque el signo de $f'(x)$ cambia de negativo a positivo cuando x rebasa 1. El valor de este mínimo es $f(1) = -8$. •

EJEMPLO 3 Calcular los máximos y mínimos locales de la función f dada por $f(x) = x^{1/3}(8 - x)$. Trazar la gráfica de f.

Solución Por la Regla del Producto,

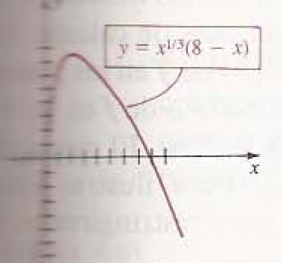
$$f'(x) = x^{1/3}(-1) + (8 - x)\tfrac{1}{3}x^{-2/3}$$

$$= \frac{-3x + (8 - x)}{3x^{2/3}} = \frac{4(2 - x)}{3x^{2/3}}$$

y por tanto los números críticos de f son 0 y 2. Esto indica que, como en el Ejemplo 1, hay que considerar los signos de $f'(x)$ en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, \infty)$. Como f' es continua y no tiene ceros en cada intervalo, puede determinarse el signo de $f'(x)$ usando un valor de prueba $f'(k)$ apropiado. La siguiente tabla exhibe los resultados del análisis (verifíquese cada dato).

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
k	-1	1	8
Valor de prueba $f'(k)$	4	$\frac{4}{3}$	-2
Signo de $f(x)$	+	+	−
Comportamiento de f	creciente en $(-\infty, 0]$	creciente en $[0, 2]$	decreciente en $[2, \infty)$


FIGURA 4.18



Para el intervalo $(2, \infty)$ se escogió el número 8 porque $8^{2/3}$ es un entero. Por supuesto, se podría haber elegido *cualquier* número k en $(2, \infty)$ y evaluar $f'(k)$ con una calculadora.

Por el Criterio de la Primera Derivada, f tiene un máximo local en 2 pues f' cambia de positiva a negativa en 2. Por lo tanto,

$$\text{Máximo local: } f(2) = 2^{1/3}(8 - 2) = 6\sqrt[3]{2} \sim 7.6.$$

La función no tiene un valor extremo en 0 porque f' no cambia de signo en 0.

Para graficar f trazamos primero los puntos correspondientes a los números críticos. De la expresión para $f(x)$ se deduce que las abscisas en el origen de la gráfica son 0 y 8. En la Figura 4.18 se tiene la gráfica. •

EJEMPLO 4 Calcular los valores extremos locales de la función f dada por $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 8)$. Trazar la gráfica de f.

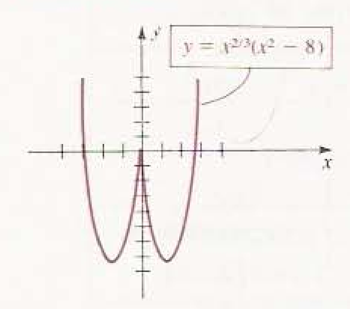
Solución Por la Regla del Producto,

$$f'(x) = x^{2/3}(2x) + (x^2 - 8)(\tfrac{2}{3}x^{-1/3}) = \frac{6x^2 + 2(x^2 - 8)}{3x^{1/3}} = \frac{8(x^2 - 2)}{3x^{1/3}}.$$

Los números críticos son las soluciones de $x^2 - 2 = 0$ y $x^{1/3} = 0$; es decir, $-\sqrt{2}$, 0 y $\sqrt{2}$. Esto sugiere obtener el signo de $f'(x)$ en cada uno de los intervalos $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, \infty)$. Exhibimos ahora los resultados del análisis en una tabla como en los ejemplos anteriores.

Intervalo	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, 0)$	$(0, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
k	-8	-1	1	8
Valor de prueba $f'(k)$	$-\frac{248}{3}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{248}{3}$
Signo de $f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	decreciente en $(-\infty, -\sqrt{2}]$	creciente en $[-\sqrt{2}, 0]$	decreciente en $[0, \sqrt{2}]$	creciente en $[\sqrt{2}, \infty)$

FIGURA 4.19



Por el Criterio de la Primera Derivada, f tiene dos mínimos locales en $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ y un máximo local en 0. Los valores correspondientes de la función son:

Máximo local: $f(0) = 0$

Mínimo local: $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = -6\sqrt[3]{2} \approx -7.56.$

Nótese que $f'(0)$ no existe. En la Figura 4.19 se tiene la gráfica. •

Como se vio en la Sección 4.1, los máximos y mínimos *absolutos* de una función pueden no encontrarse entre los máximos y mínimos locales. Recuérdese de (4.9) que si se desea determinar los máximos y mínimos absolutos de una función f que es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, además de calcular los máximos y mínimos locales hay que obtener los valores $f(a)$ y $f(b)$ de f en los puntos de frontera (o extremos) a y b del intervalo $[a, b]$. El máximo absoluto de f en $[a, b]$ es el mayor entre los valores extremos locales y los valores $f(a)$ y $f(b)$. El menor de todos estos números es el mínimo absoluto de f en $[a, b]$. Para ilustrar estas observaciones consideraremos la función del ejemplo anterior pero restringiremos la atención a ciertos intervalos.

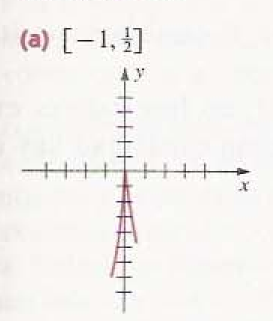
EJEMPLO 5 Sea $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 8)$. Calcular el máximo y el mínimo absolutos de f en cada uno de los siguientes intervalos:

(a) $[-1, \frac{1}{2}]$ **(b)** $[-1, 3]$ **(c)** $[-3, -2]$

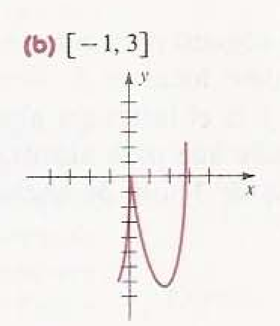
Solución La gráfica de la Figura 4.19 indica los valores extremos locales y los intervalos en los que f es creciente o decreciente. La Figura 4.20 muestra las partes de la gráfica de f correspondientes a cada uno de los intervalos (a), (b) y (c).

FIGURA 4.20

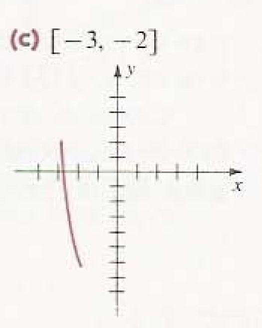
(a) $[-1, \frac{1}{2}]$



(b) $[-1, 3]$



(c) $[-3, -2]$



A partir de estos croquis se obtiene la tabla siguiente (verifíquese cada dato).

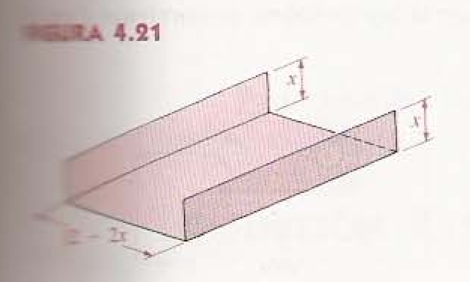
Intervalo	Mínimo absoluto	Máximo absoluto
$[-1, \frac{1}{2}]$	$f(-1) = -7$	$f(0) = 0$
$[-1, 3]$	$f(\sqrt{2}) = -6\sqrt[3]{2}$	$f(3) = \sqrt[3]{9}$
$[-3, -2]$	$f(-2) = -4\sqrt[3]{4}$	$f(-3) = \sqrt[3]{9}$

Adviértase que en algunos intervalos el máximo o el mínimo de f es también un valor extremo local, pero en otros casos no es así. •

En las aplicaciones, una cantidad física Q suele describirse en términos de una fórmula $Q = f(x)$, donde f es una función derivable. (Por supuesto, se pueden usar otros símbolos para las variables.) Luego es posible usar la derivada $D_x Q$ como ayuda para calcular los máximos y mínimos de Q. A veces es necesario obtener una fórmula adecuada para Q, como en el ejemplo siguiente (véanse también los Ejercicios 33 y 34). En la Sección 4.5 se darán muchas otras aplicaciones de este tipo.

EJEMPLO 6 Una larga lámina rectangular de metal de 12 pulg de ancho, se va a convertir en un canalón para lluvia doblando dos lados hacia arriba, de manera que queden perpendiculares al resto de la lámina. ¿De cuántas pulgadas debe ser lo doblado para dar al canalón la máxima capacidad?

FIGURA 4.21



Solución La Figura 4.21 muestra el canalón. En ella x denota el ancho de la parte doblada a cada lado. El ancho de la pieza es $12 - 2x$ pulgadas. La capacidad será máxima cuando el área del rectángulo con lados de longitud x y $12 - 2x$ lo sea. Denotando el área por $f(x)$,

$$f(x) = x(12 - 2x) = 12x - 2x^2.$$

Nótese que $0 < x < 6$ porque si $x = 0$ o $x = 6$, no se forma un canalón (el área del rectángulo sería $f(0) = 0 = f(6)$).

Derivando,

$$f'(x) = 12 - 4x = 4(3 - x)$$

y en consecuencia el único número crítico de f es 3. Como f' cambia de positiva a negativa en 3, $f(3)$ es un máximo local de f.

Como el dominio de f es el intervalo abierto (0, 6), no hay valores extremos en la frontera. Resulta entonces que para alcanzar la máxima capacidad hay que doblar a los lados formando tiras de 3 pulg de ancho. •

EJERCICIOS 4.3

Ejercicios 1-16: Calcule los máximos y mínimos locales de f. Describa los intervalos en los que f es creciente o decreciente y trace la gráfica de f.

1. $f(x) = 5 - 7x - 4x^2$

2. $f(x) = 6x^2 - 9x + 5$

3. $f(x) = 2x^3 + x^2 - 20x + 1$

4. $f(x) = x^3 - x^2 - 40x + 8$

5. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$

6. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$

7. $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$ **8.** $f(x) = x^{2/3}(8 - x)$

9. $f(x) = x^2\sqrt[3]{x^2 - 4}$ **10.** $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

11. $f(x) = x^{2/3}(x - 7)^2 + 2$ **12.** $f(x) = 4x^3 - 3x^4$

13. $f(x) = x^3 + (3/x)$

14. $f(x) = 8 - \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}$

15. $f(x) = 10x^3(x - 1)^2$ **16.** $f(x) = (x^2 - 10x)^4$

Ejercicios 17-22: Calcule los máximos y mínimos locales de f.

17. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 9x}$ **18.** $f(x) = x^2/\sqrt{x + 7}$

19. $f(x) = (x - 2)^3(x + 1)^4$ **20.** $f(x) = x^2(x - 5)^4$

21. $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x + 3}$ **22.** $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$

23 -26. Calcule el máximo y el mínimo absolutos de las funciones definidas en los Ejercicios 1-4, en cada uno de los siguientes intervalos:

(a) $[-1, 1]$ (b) $[-4, 2]$ (c) $[0, 5]$

Ejercicios 27-28: Trace la gráfica de una función derivable f que satisfaga las condiciones dadas.

27. $f'(-5) = 0$; $f'(0) = 0$; $f'(5) = 0$; $f'(x) > 0$ si $|x| > 5$; $f'(x) < 0$ si $0 < |x| < 5$.

28. $f'(a) = 0$ para $a = 1, 2, 3, 4, 5$ y $f'(x) > 0$ para todos los otros valores de x.

29. Un hato de 100 venados se transporta a una isla pequeña. El rebaño crece rápidamente pero los recursos alimenticios de la isla comienzan a escasear y la población disminuye. Suponga que el número $N(t)$ de venados que hay a los t años está dado por $N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$.

(a) ¿Cuándo deja de crecer el hato? ¿Cuál es su tamaño máximo? ¿Cuándo se extingue la población?

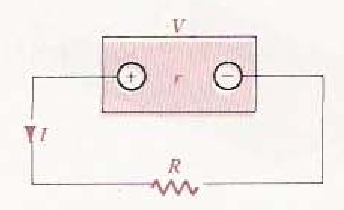
(b) Trace la gráfica de N para $t \geq 0$.

30. (a) Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Halle valores de a, b, c y d para los que f tenga un máximo local 2 en $x = -1$, y un mínimo local -1 en $x = 1$.

(b) Sea $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Halle valores de a, b, c, d y e para los que f tenga un máximo local 2 en $x = 0$, y dos mínimos locales -14 en $x = -2$ y en $x = 2$, respectivamente.

31. Una pila eléctrica que tiene un voltaje fijo V y una resistencia interna fija r se conecta a un circuito que tiene resistencia variable R (véase la figura). Por la ley de Ohm, la corriente I en el

EJERCICIO 31



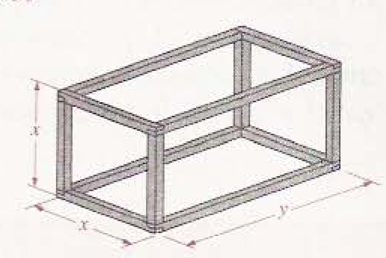
circuito es $I = V/(R + r)$. La potencia de salida P está dada por $P = I^2R$. Demuestre que la potencia máxima se alcanza cuando $R = r$.

32. La potencia de salida P de una batería o acumulador de automóvil está dada por $P = VI - I^2r$, donde V es el voltaje, I la corriente y r la resistencia interna de la batería. ¿Qué valor de la corriente corresponde a la potencia máxima?

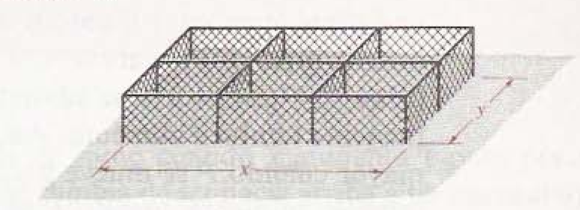
33. Se va a construir una armazón para embalaje con un trozo de madera con sección cuadrada de 2 por 2 pulgadas y 24 pie de largo. El embalaje va a tener extremos cuadrados, como se muestra en la figura. Calcule las dimensiones que producen el máximo volumen exterior. (*Sugerencia:* Exprese primero y como función de x y luego V como función de x.)

34. Se van a usar 300 m de tela de alambre para construir seis jaulas de un zoológico, como se muestra en la figura. Calcule las dimensiones para las que el área que abarcan las jaulas es máxima. (*Sugerencia:* Exprese primero y como función de x y luego A como función de x.)

EJERCICIO 33



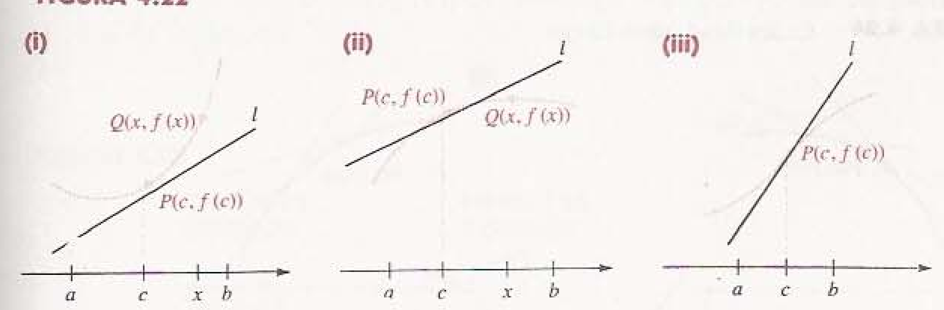
EJERCICIO 34



4.4 CONCAVIDAD Y CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

El concepto de *concavidad* es útil para describir la gráfica de una función derivable f. Si $f'(c)$ existe, entonces la gráfica de f tiene una recta tangente l con pendiente $f'(c)$ en el punto $P(c, f(c))$. La Figura 4.22 ilustra tres casos que pueden ocurrir cuando $f'(c) > 0$. Hay situaciones similares cuando $f'(c) < 0$ o bien $f'(c) = 0$. Para la gráfica de la Figura 4.22(i), se dice que en el intervalo (a, b), la gráfica está *arriba* de la recta tangente en P. En (ii), la gráfica está *abajo* de la recta tangente. En (iii), la gráfica no está ni arriba ni abajo de la recta tangente para cualquier intervalo abierto (a, b) que contenga a c, sino que la *corta* en ese punto.

FIGURA 4.22



Para describir las gráficas que se ilustran en la Figura 4.22 se usa la siguiente terminología.

DEFINICIÓN (4.15) Sea f una función que es derivable en un número c.

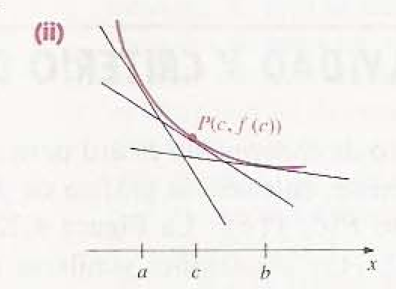
(i) La gráfica de f tiene **concavidad hacia arriba** en el punto $P(c,\ f(c))$ si existe un intervalo abierto $(a,\ b)$ que contiene a c, tal que en $(a,\ b)$ la gráfica de f está por encima de la recta tangente en P.

(ii) La gráfica de f tiene **concavidad hacia abajo** en el punto $P(c,\ f(c))$ si existe un intervalo abierto $(a,\ b)$ que contiene a c, tal que en $(a,\ b)$ la gráfica de f está por debajo de la recta tangente en P.

Consideremos una función f cuya gráfica tiene concavidad hacia arriba en el punto $P(c,\ f(c))$. Como en la Figura 4.22(i), existe un intervalo abierto $(a,\ b)$ que contiene a c, tal que en $(a,\ b)$ la gráfica de f está por encima de la recta tangente en P. Si f es derivable en $(a,\ b)$, entonces la gráfica de f tiene una recta tangente en todos los puntos $Q(x,\ f(x))$ para $a < x < b$. Si se consideran varias de estas rectas tangentes (véase la Figura 4.23), se advierte que cuando x aumenta, la pendiente $f'(x)$ de la recta tangente también aumenta. Así, en la Figura 4.23(i), se obtiene una pendiente positiva mayor cuando P se mueve hacia la derecha. En (ii), la pendiente de la recta tangente también aumenta cuando P se mueve hacia la derecha, haciéndose menos negativa.

FIGURA 4.23 Concavidad hacia arriba

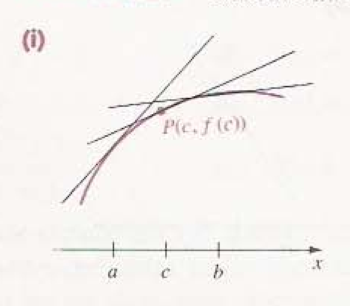
(i) (ii)



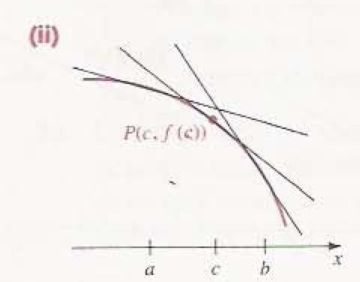
Análogamente, si la gráfica de f tiene concavidad hacia abajo en $P(c,\ f(c))$, entonces se obtienen gráficas como las de la Figura 4.24. En ellas la pendiente $f'(x)$ de la recta tangente *disminuye* cuando P se mueve hacia la derecha.

FIGURA 4.24 Concavidad hacia abajo

(i)



(ii)



Recíprocamente, se puede esperar que si la derivada $f'(x)$ aumenta cuando x crece pasando por c, entonces la gráfica tiene concavidad hacia arriba en $P(c,\ f(c))$ y si $f'(x)$ disminuye, entonces la gráfica tiene concavidad hacia abajo. Según el Teorema (4.13) si la derivada de una función es positiva en un intervalo, entonces la función es creciente

Por lo tanto, si los valores de la *segunda derivada* f'' son positivos en un intervalo, entonces la *primera* derivada f' crece. Análogamente, si f'' es negativa, f'' decrece. Esto indica que el signo de f'' puede servir para averiguar la concavidad, como se enuncia en el siguiente teorema del cual se da una demostración al finalizar la sección.

PRUEBA DE LA CONCAVIDAD (4.16)

Sea f una función derivable en un intervalo abierto que contiene a c, tal que $f''(c)$ existe.

(i) Si $f''(c) > 0$, la gráfica tiene concavidad hacia arriba en $P(c, f(c))$.

(ii) Si $f''(c) < 0$, la gráfica tiene concavidad hacia abajo en $P(c, f(c))$.

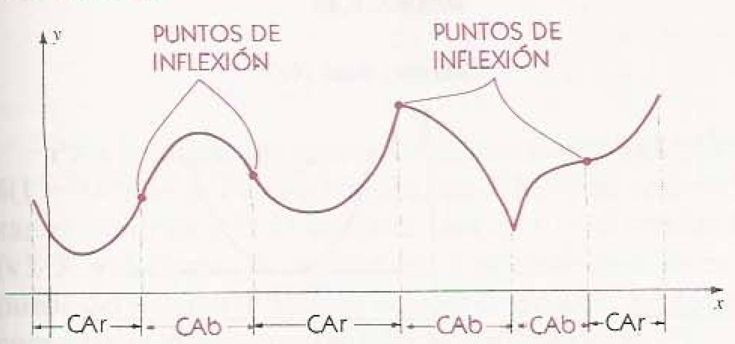
Si la segunda derivada $f''(x)$ cambia de signo cuando x aumenta y pasa por un número k, entonces por (4.16) la concavidad cambia de ser hacia arriba a ser hacia abajo, o bien de ser hacia abajo a ser hacia arriba. El punto $(k, f(k))$ se llama *punto de inflexión* de acuerdo con la siguiente definición.

DEFINICIÓN (4.17)

Un punto $P(k, f(k))$ en la gráfica de una función f es un **punto de inflexión** si f'' existe en un intervalo abierto (a, b) que contiene a k y f'' cambia de signo en k.

El croquis de la Figura 4.25 exhibe algunos puntos de inflexión típicos en una gráfica. Se dice que una gráfica es **cóncava hacia arriba** (o **hacia abajo) en un intervalo,** si tiene concavidad hacia arriba (o hacia abajo) en todos los números del intervalo. Aquellos intervalos en los que la gráfica de la Figura 4.25 es cóncava hacia arriba o hacia abajo se señalan por CAr o CAb, respectivamente. Obsérvese que un pico puede ser o no un punto de inflexión.

FIGURA 4.25



EJEMPLO 1 Sea $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$. Encuentre los intervalos en los que la gráfica de f tiene concavidad hacia arriba y aquéllos en los que tiene concavidad hacia abajo.

FIGURA 4.26



Solución En los Ejemplos 1 y 2 de la sección anterior consideramos esta función. Como $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$,

$$f''(x) = 6x + 2 = 2(3x + 1).$$

Por lo tanto, $f''(x) < 0$ si $3x + 1 < 0$, es decir, si $x < -\frac{1}{3}$. Aplicando la Prueba de la Concavidad (4.16) vemos que la gráfica tiene concavidad hacia abajo en el intervalo infinito $(-\infty, -\frac{1}{3})$. Análogamente, $f''(x) > 0$ si $x > -\frac{1}{3}$, y por tanto la gráfica tiene concavidad hacia arriba en $(-\frac{1}{3}, \infty)$. Según la Definición (4.17), el punto $P(-\frac{1}{3}, -\frac{88}{27})$ en el que f'' cambia de signo (y la concavidad de ser hacia abajo a ser hacia arriba) es un punto de inflexión. La gráfica de f que se obtuvo previamente se exhibe de nuevo en la Figura 4.26 para indicar el punto de inflexión. •

Si $P(c, f(c))$ es un punto de inflexión sobre la gráfica de f, y f'' es continua en un intervalo abierto que contiene a c, entonces necesariamente $f''(c) = 0$. Esto se puede demostrar aplicando el Teorema del Valor Intermedio (2.28) a la función f''. Entonces, para localizar los puntos de inflexión de una función cuya segunda derivada es continua, se comienza por encontrar todos los números x para los que $f''(x) = 0$. Luego se prueba cada uno de estos números para determinar si es la abscisa de un punto de inflexión. Antes de dar un ejemplo, enunciamos el siguiente criterio para distinguir máximos y mínimos locales.

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Sea f una función derivable en un intervalo abierto que contiene a c y tal que $f'(c) = 0$.

(i) Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c.
(ii) Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c.

FIGURA 4.27

Máximo local $f(c)$

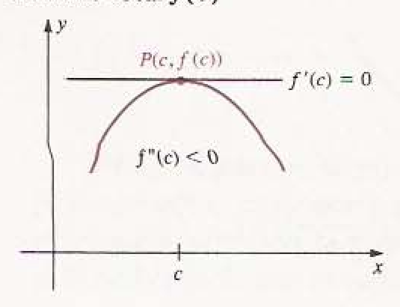
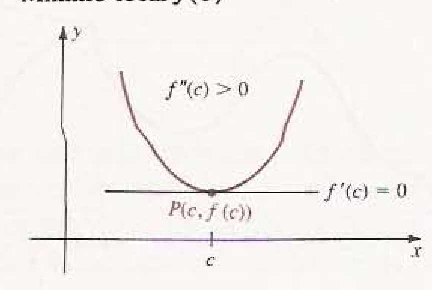


FIGURA 4.28

Mínimo local $f(c)$



Demostración Si $f'(c) = 0$, entonces la recta tangente a la gráfica en $P(c, f(c))$ es horizontal. Si además $f''(c) < 0$ entonces la gráfica tiene concavidad hacia abajo en c y existe un intervalo (a, b) que contiene a c en el que la gráfica se encuentra abajo de la recta tangente en P. Por lo tanto, $f(c)$ es un máximo local de f, como se ilustra en la Figura 4.27. Esto demuestra (i). Se puede dar una demostración similar para el caso (ii), que se ilustra en la Figura 4.28. • •

El Criterio de la Segunda Derivada no se puede aplicar cuando $f''(c) = 0$. En tales casos se debe usar el Criterio de la Primera Derivada (véase el Ejemplo 3).

EJEMPLO 2 Sea $f(x) = 12 + 2x^2 - x^4$. Usar el Criterio de la Segunda Derivada para calcular los máximos y mínimos locales de f. Discutir la concavidad, encontrar los puntos de inflexión y trazar la gráfica de f.

Solución Comenzamos por encontrar la primera y la segunda derivadas y factorizarlas como sigue:

$$f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2)$$
$$f''(x) = 4 - 12x^2 = 4(1 - 3x^2)$$

Se emplea la expresión de $f'(x)$ para encontrar los números críticos 0, 1 y -1. Los valores de f'' en estos números son

$$f''(0) = 4 > 0, \qquad f''(1) = -8 < 0 \qquad \text{y} \qquad f''(-1) = -8 < 0.$$

Entonces por el Criterio de la Segunda Derivada, la función tiene un mínimo local en 0 y dos máximos locales, en 1 y -1. Los valores correspondientes de la función son $f(0) = 12$ y $f(1) = 13 = f(-1)$. La siguiente tabla resume los resultados.

Número crítico c	$f''(c)$	Signo de $f''(c)$	Conclusión
-1	-8	$-$	Máximo local: $f(-1) = 13$
0	4	+	Mínimo local: $f(0) = 12$
1	-8	$-$	Máximo local: $f(1) = 13$

Para localizar los puntos de inflexión resolvemos la ecuación $f''(x) = 0$, es decir, $4(1 - 3x^2) = 0$. Evidentemente, las soluciones son $-\sqrt{3}/3$ y $\sqrt{3}/3$. Esto sugiere analizar el signo de $f''(x)$ en cada uno de los intervalos $(-\infty, -\sqrt{3}/3)$, $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ y $(\sqrt{3}/3, \infty)$. Como f'' es continua y no tiene ceros en estos intervalos, el signo de $f''(x)$ puede determinarse usando valores de prueba. Se disponen los resultados en una tabla como sigue. El último renglón se deduce de (4.18).

Intervalo	$(-\infty, -\sqrt{3}/3)$	$(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$	$(\sqrt{3}/3, \infty)$
k	-1	0	1
Valor de prueba $f''(k)$	-8	4	-8
Signo de $f''(x)$	$-$	$+$	$-$
Concavidad	hacia abajo	hacia arriba	hacia abajo

FIGURA 4.29



Como $f''(x)$ cambia de signo en $-\sqrt{3}/3$ y $\sqrt{3}/3$, los puntos correspondientes sobre la gráfica $(\pm\sqrt{3}/3, 113/9)$ son puntos de inflexión. Estos son los puntos en los que la concavidad cambia. Como se indica en la tabla, la gráfica tiene concavidad hacia arriba en el intervalo $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3},3)$), y concavidad hacia abajo fuera de $[-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$. La Figura 4.29 muestra un croquis de la gráfica. •

EJEMPLO 3 Sea $f(x) = x^5 - 5x^3$. Usar el Criterio de la Segunda Derivada para encontrar los máximos y mínimos locales de f. Discutir la concavidad, encontrar los puntos de inflexión y trazar la gráfica de f.

Solución Derivando,

$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2 - 3)$$
$$f''(x) = 20x^3 - 30x = 10x(2x^2 - 3).$$

Resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$ obtenemos los números críticos $0, -\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$. Como en el Ejemplo 2, resulta así la tabla siguiente (verifíquese cada dato).

Número crítico c	$f''(c)$	Signo de $f''(c)$	Conclusión
$-\sqrt{3}$	$-30\sqrt{3}$	$-$	Máximo local: $f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$
0	0	ninguno	Ninguna
$\sqrt{3}$	$30\sqrt{3}$	$+$	Mínimo local: $f(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$

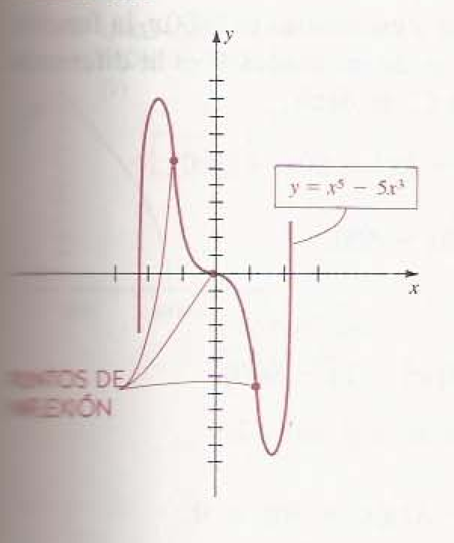
Como $f''(0) = 0$, el Criterio de la Segunda Derivada no puede aplicarse en 0 y por lo tanto aplicamos el Criterio de la Primera Derivada. Usando valores de prueba puede demostrarse que si $-\sqrt{3} < x < 0$, entonces $f'(x) < 0$, y si $0 < x < \sqrt{3}$, entonces $f'(x) < 0$. Como $f'(x)$ no cambia de signo, no hay valores extremos.

Para encontrar los puntos de inflexión consideramos la ecuación $f''(x) = 0$, es decir, $10x(2x^2 - 3) = 0$. Las soluciones de esta ecuación en orden creciente son $-\sqrt{6}/2$, 0 y $\sqrt{6}/2$. Es posible construir la tabla siguiente:

Intervalo	$(-\infty, -\sqrt{6}/2)$	$(-\sqrt{6}/2, 0)$	$(0, \sqrt{6}/2)$	$(\sqrt{6}/2, \infty)$
k	-2	-1	1	2
Valor de prueba $f''(k)$	-100	10	-10	100
Signo de $f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Concavidad	hacia abajo	hacia arriba	hacia abajo	hacia arriba

Debido a que el signo de $f''(x)$ cambia cuando x pasa por $-\sqrt{6}/2$, 0 y $\sqrt{6}/2$, los puntos $(0, 0)$, $(-\sqrt{6}/2, 21\sqrt{6}/8)$ y $(\sqrt{6}/2, -21\sqrt{6}/8)$ son puntos de inflexión. La gráfica está en la Figura 4.30, en la que los ejes x y y tienen diferente escala. •

FIGURA 4.30



La derivada f'' es continua en todos los ejemplos anteriores. Si $f'(c)$ o $f''(c)$ no existen, entonces $(c, f(c))$ también puede ser un punto de inflexión, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Sea $f(x) = 1 - x^{1/3}$. Calcular los valores extremos locales, discutir la concavidad, encontrar los puntos de inflexión y trazar la gráfica de f.

Solución Derivando,

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-2/3} = -\frac{1}{3x^{2/3}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{9}x^{-5/3} = \frac{2}{9x^{5/3}}.$$

La primera derivada no existe en $x = 0$ que es el único número crítico de f. Como $f''(0)$ no está definido, no puede aplicarse el Criterio de la Segunda Derivada. Sin embargo, si $x \neq 0$ entonces $x^{2/3} > 0$ y $f'(x) = -1/(3x^{2/3}) < 0$, lo que significa que f es decreciente en todo su dominio. Por lo tanto, $f(0)$ no es un valor extremo local.

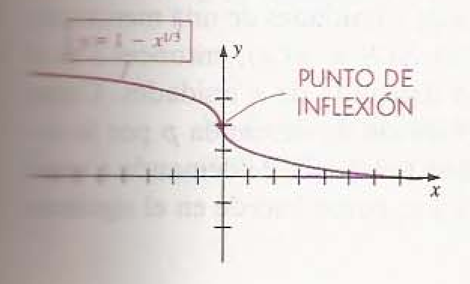
El hecho de que f'' no esté definida en $x = 0$ sugiere que el punto $(0, 1)$ de la gráfica de f podría ser un punto de inflexión. Apliquemos la Definición (4.17) con $k = 0$. Si $x < 0$, entonces $x^{5/3} < 0$. Por lo tanto,

$$f''(x) = \frac{2}{9x^{5/3}} < 0 \quad \text{si } x < 0$$

lo cual implica que la gráfica de f tiene concavidad hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 0)$. Si $x > 0$, entonces $x^{5/3} > 0$. Por lo tanto,

$$f''(x) = \frac{2}{9x^{5/3}} > 0 \quad \text{si } x > 0$$

FIGURA 4.31



lo cual significa que la gráfica tiene concavidad hacia arriba en el intervalo $(0, \infty)$. Entonces por (4.19), el punto $(0, 1)$ es un punto de inflexión. Usando esta información y trazando algunos puntos obtenemos el croquis de la Figura 4.31. •

En la Sección 3.3 se discutieron problemas de economía que involucran las funciones de costo, de costo medio, de ingreso y de utilidades: C, c, R y P. Sus derivadas, C', c', R' y P' (llamadas costo marginal, costo medio marginal, ingreso marginal y utilidades marginales), se usan para determinar máximos y mínimos, como se ilustra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 Una fábrica de muebles calcula que el costo semanal de producir x reproducciones terminadas a mano de un escritorio colonial, está dado por $C(x) = x^3 - 3x^2 - 80x + 500$. Cada escritorio producido se vende en \$2800 (dólares). ¿Qué producción mensual rendirá las máximas utilidades? ¿Cuál es la mayor ganancia posible por semana?

Solución Como el ingreso que se obtiene al vender x escritorios es $2800x$, la función de ingreso R está dada por $R(x) = 2800x$. La función de utilidades P es la diferencia entre la función de ingreso R y la función de costo C, es decir,

$$P(x) = R(x) - C(x) = 2800x - (x^3 - 3x^2 - 80x + 500)$$

o bien
$$P(x) = -x^3 + 3x^2 + 2880x - 500.$$

Para evaluar la ganancia máxima se deriva y

$$P'(x) = -3x^2 + 6x + 2880 = -3(x^2 - 2x - 960).$$

Los números críticos de P son las soluciones de

$$x^2 - 2x - 960 = 0 \quad \text{o bien} \quad (x - 32)(x + 30) = 0,$$

es decir, $x = 32$ o $x = -30$. Como la solución negativa no tiene sentido, basta considerar $x = 32$.

La segunda derivada de la función de utilidades P es

$$P''(x) = -6x + 6$$

Por lo tanto,

$$P''(32) = -6(32) + 6 = -176 < 0.$$

Entonces, por el Criterio de la Seguna Derivada, la máxima ganancia se obtiene si se producen y se venden 32 escritorios semanalmente. La ganancia máxima por semana es

$$P(32) = -(32)^3 + 3(32)^2 + 2880(32) - 500 = \$61\,964. \quad \bullet$$

Al final de la Sección 3.3 se presentó la noción de *función de demanda* p, donde $p(x)$ es el precio por unidad cuando hay una demanda de x unidades de una mercancía. Entonces el ingreso $R(x)$ está dado por $R(x) = xp(x)$. Si $S = p(x)$, entonces S es el precio de venta de una unidad correspondiente a una demanda de x unidades. Como normalmente al disminuir S entonces x aumenta, la función de demanda p por lo común es decreciente, es decir, $p'(x) < 0$ para todo x. Las funciones de demanda a veces están definidas implícitamente por una ecuación en S y x, como sucede en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 La demanda x y el precio de venta S de un producto están relacionados por la ecuación $2x + S^2 - 12\,000 = 0$. Encontrar la función de demanda, la función de demanda marginal, la función de ingreso y la función de ingreso marginal. Hallar también el número de unidades y el precio por unidad que producen el ingreso máximo. ¿Cuál es este ingreso máximo?

Solución Como $S^2 = 12\,000 - 2x$, y S es positivo, vemos que la función de demanda S está dada por

$$S = p(x) = \sqrt{12\,000 - 2x}.$$




El dominio de p consta de todos los números x tales que $12\,000 - 2x > 0$ o, equivalentemente, $2x < 12\,000$. Por lo tanto, $0 \le x < 6000$. La gráfica de p está en la Figura 4.32. Teóricamente, cuando el precio es $\sqrt{12\,000}$ o aproximadamente \$109.54, no hay ventas, y cuando el precio se acerca a \$0 la demanda se acerca a 6000.

La función de demanda marginal p' está dada por

$$p'(x) = \frac{-1}{\sqrt{12\,000 - 2x}}.$$

El signo negativo indica que una disminución en el precio está asociada a un aumento en la demanda.

La función de ingreso R está dada por

$$R(x) = xp(x) = x\sqrt{12\,000 - 2x}.$$

Derivando y simplificando, se obtiene la función de ingreso marginal R' que es

$$R'(x) = \frac{12\,000 - 3x}{\sqrt{12\,000 - 2x}}.$$

La función de ingreso R tiene un número crítico $x = 12\,000/3 = 4000$. Como $R'(x)$ es positivo si $0 \le x < 4000$ y negativo si $4000 < x < 6000$, el ingreso máximo se alcanza cuando se producen y se venden 4000 unidades. Esto corresponde a un precio de venta de

$$p(4000) = \sqrt{12\,000 - 2(4000)} \approx \$63.25.$$

El ingreso máximo, que se obtiene al vender 4000 unidades a este precio, es

$$4000(63.25) = \$253\,000. \quad \bullet$$

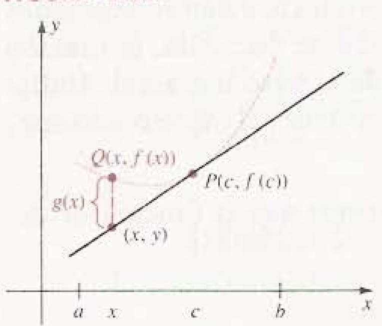
Demostración de la Prueba de la Concavidad (4.16) Aplicando la Definición (3.1′) a la función f',

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}.$$

Si $f''(c) > 0$, entonces por el Teorema (2.12), existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0$$


FIGURA 4.33



para todo x en (a, b) diferente de c; es decir, $f'(x) - f'(c)$ y $x - c$ tienen ambos el mismo signo. A continuación se demuestra que esto implica la concavidad hacia arriba.

Para todo x en el intervalo (a, b), sea y la ordenada en x de la recta tangente en $P(c, f(c))$ y sea $Q(x, f(x))$ el punto sobre la gráfica de f (véase la Figura 4.33). Si se define $g(x) = f(x) - y$, la concavidad hacia arriba se obtendrá demostrando que $g(x)$ es positivo para todo x tal que $x \neq c$.

Como $y - f(c) = f'(c)(x - c)$ es la ecuación de la recta tangente en P, resulta que la ordenada del punto (x, y) de la recta tangente está dada por $y = f(c) + f'(c)(x - c)$. Por lo tanto,

$$g(x) = f(x) - y = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c).$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio (4.12) a la función f en el intervalo $[x, c]$, se ve que existe un número w en el intervalo abierto (x, c) tal que

$$f(x) - f(c) = f'(w)(x - c).$$

Sustituyendo este valor de $f(x) - f(c)$ en la fórmula de $g(x)$ se obtiene

$$\begin{aligned} g(x) &= [f(x) - f(c)] - f'(c)(x - c) \\ &= f'(w)(x - c) - f'(c)(x - c). \end{aligned}$$

Esto puede factorizarse como sigue:

$$g(x) = [f'(w) - f'(c)](x - c)$$

Como w está en el intervalo (a, b), del primer párrafo de la demostración se sabe que $f'(w) - f'(c)$ y $w - c$ tienen el mismo signo. Maś aún, como w está entre x y c, $w - c$ y $x - c$ tienen el mismo signo. Por lo tanto, $f'(w) - f'(x)$ y $x - c$ tienen el mismo signo para todo x en (a, b) tal que $x \neq c$. De la expresión factorizada para $g(x)$ se deduce que $g(x)$ es positivo si $x \neq c$, que es lo que se quería demostrar. La parte (ii) se puede demostrar de manera parecida. • •

EJERCICIOS 4.4

Ejercicios 1-18: Use el Criterio de la Segunda Derivada (cuando se pueda aplicar) para calcular los valores extremos de f. Discuta la concavidad, encuentre las abscisas de los puntos de inflexión y trace la gráfica de f.

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$
2. $f(x) = x^3 + 10x^2 + 25x - 50$
3. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6$
4. $f(x) = 8x^2 - 2x^4$
5. $f(x) = 2x^6 - 6x^4$
6. $f(x) = 3x^5 - 5x^3$
7. $f(x) = (x^2 - 1)^2$
8. $f(x) = x - (16/x)$
9. $f(x) = \sqrt[5]{x} - 1$
10. $f(x) = \dfrac{x + 4}{\sqrt{x}}$
11. $f(x) = x^2 - (27/x^2)$
12. $f(x) = x^{2/3}(1 - x)$
13. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

14. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

15. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(3x + 10)$

16. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

17. $f(x) = 8x^{1/3} + x^{4/3}$

18. $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

Ejercicios 19-26: Trace la gráfica de una función continua f que satisfaga todas las condiciones dadas.

19. $f(0) = 1$; $f(2) = 3$; $f'(0) = f'(2) = 0$; $f'(x) < 0$ si $|x - 1| > 1$; $f'(x) > 0$ si $|x - 1| < 1$; $f''(x) > 0$ si $x < 1$; $f''(x) < 0$ si $x > 1$.

20. $f(0) = 4$; $f(2) = 2$; $f(5) = 6$; $f'(0) = f'(2) = 0$; $f'(x) > 0$ si $|x - 1| > 1$; $f'(x) < 0$ si $|x - 1| < 1$; $f''(x) < 0$ si $x < 1$ o si $|x - 4| < 1$; $f''(x) > 0$ si $|x - 2| < 1$ o si $x > 5$.

21. $f(0) = 2$; $f(2) = f(-2) = 1$; $f'(0) = 0$; $f'(x) > 0$ si $x < 0$; $f'(x) < 0$ si $x > 0$; $f''(x) < 0$ si $|x| < 2$; $f''(x) > 0$ si $|x| > 2$.

22. $f(1) = 4$; $f'(x) > 0$ si $x < 1$; $f'(x) < 0$ si $x > 1$; $f''(x) > 0$ para todo $x \neq 1$.

23. $f(-2) = f(6) = -2$; $f(0) = f(4) = 0$; $f(2) = f(8) = 3$; f' no está definida en 2 ni en 6; $f'(0) = 1$; $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 2)$ y $(6, \infty)$; $f'(x) < 0$ si $|x - 4| < 2$; $f''(x) < 0$ en $(-\infty, 0)$, $(4, 6)$ y $(6, \infty)$; $f''(x) > 0$ en $(0, 2)$ y $(2, 4)$.

24. $f(0) = 2$; $f(2) = 1$; $f(4) = f(10) = 0$; $f(6) = -4$; $f'(2) = f'(6) = 0$; $f'(x) < 0$ en $(-\infty, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 6)$ y $(10, \infty)$; $f'(x) > 0$ en $(6, 10)$; $f'(4)$ y $f'(10)$ no existen; $f''(x) > 0$ en $(-\infty, 2)$, $(4, 10)$ y $(10, \infty)$; $f''(x) < 0$ en $(2, 4)$.

25. Si n es un entero impar, entonces $f(n) = 1$ y $f'(n) = 0$. Si n es un entero par, entonces $f(n) = 0$ y $f'(n)$ no existe. Si n es cualquier entero, entonces
(a) $f'(x) > 0$ si $2n < x < 2n + 1$;
(b) $f'(x) < 0$ si $2n - 1 < x < 2n$;
(c) $f''(x) < 0$ si $2n < x < 2n + 2$.

26. $f(x) = x$ si $x = -1, 2, 4$ u 8; $f'(x) = 0$ si $x = -1, 4, 6$ u 8; $f'(x) < 0$ en $(-\infty, -1)$, $(4, 6)$ y $(8, \infty)$; $f'(x) > 0$ en $(-1, 4)$ y $(6, 8)$; $f''(x) > 0$ en $(-\infty, 0)$, $(2, 3)$ y $(5, 7)$; $f''(x) < 0$ en $(0, 2)$, $(3, 5)$ y $(7, \infty)$.

27. Demuestre que la gráfica de una función cuadrática no tiene puntos de inflexión. Enuncie condiciones en las cuales la gráfica siempre tiene (a) concavidad hacia arriba (b) concavidad hacia abajo. Ilustre con esquemas.

28. Demuestre que la gráfica de un polinomio de grado 3 tiene exactamente un punto de inflexión. Ilustre con esquemas.

29. Demuestre que la gráfica de un polinomio de grado $n > 2$ tiene a lo más $n - 2$ puntos de inflexión.

30. Sea $f(x) = x^n$ para $n > 1$. Demuestre que la gráfica de f tiene un punto de inflexión si n es impar y no tiene ninguno si n es par. Ilustre esto con croquis.

Ejercicios 31-32: Encuentre (a) la función de demanda marginal, (b) la función de ingreso, (c) la función de utilidades, (d) la función de utilidades marginales, (e) las utilidades máximas y (f) el costo marginal cuando la demanda es de 10 unidades, para las funciones de demanda y de costo dadas.

31. $p(x) = 50 - (x/10)$; $C(x) = 10 + 2x$

32. $p(x) = 80 - \sqrt{x - 1}$; $C(x) = 75x + 2\sqrt{x - 1}$

33. Una agencia de viajes calcula que para vender x "paquetes de vacaciones", el precio del paquete debe ser de $1800 - 2x$ unidades monetarias para $1 \leq x \leq 100$. El costo para la agencia de x paquetes es $1000 + x + 0.01x^2$. Encuentre (a) la función de ingreso, (b) la función de ganancia (o de utilidades), (c) el número de paquetes que producen la máxima ganancia y (d) la ganancia máxima.

34. Un fabricante determina que para vender x unidades de un producto el precio de venta de una unidad debe ser $400 - 0.05x$ unidades monetarias. El costo de producción de x unidades es $500 + 10x$. Encuentre (a) la función de ingreso, (b) la función de ganancia (o de utilidades), (c) el número de unidades que producen la ganancia máxima y (d) el precio por unidad cuando el ingreso marginal es 300.

35. Una compañía especialista en cocinas determina que el costo de producir y empacar x molinillos de pimienta al día es de $500 + 0.02x + 0.001x^2$ unidades monetarias. Si cada molinillo se vende

a $8.00 (dólares), ¿cuál será la producción diaria que proporcione la ganancia máxima? ¿Cuál es la ganancia máxima diaria?

36. Una compañía que ofrece paseos guiados sabe que cuando el precio del paseo es de $9.00 (dólares) por persona tiene un promedio de 1000 clientes por semana y que cuando el precio se reduce a $7.00, el promedio de clientes aumenta a 1500 por semana. Suponiendo que la función de demanda es lineal, ¿qué precio debe cobrar para obtener la máxima ganancia semanal posible?

4.5 APLICACIONES DE LOS MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Los métodos para calcular los máximos y mínimos de las funciones se pueden aplicar a la solución de algunos problemas prácticos. Estos problemas pueden expresarse verbalmente o por escrito. Para resolverlos hay que transformar sus enunciados en fórmulas, funciones o ecuaciones. Como hay muchos tipos de problemas en las aplicaciones, es difícil enunciar reglas específicas para encontrar sus soluciones. Sin embargo, puede desarrollarse una estrategia general para abordar tales problemas. La siguiente guía es de utilidad.

GUÍA PARA RESOLVER PROBLEMAS APLICADOS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS (4.19)

1. Leer cuidadosamente el problema varias veces y pensar en los hechos dados y en las cantidades desconocidas que se tratan de encontrar.
2. De ser posible, hacer un croquis o un diagrama que incluya los datos pertinentes introduciendo variables para las cantidades desconocidas. Las palabras como *qué, encontrar, cuánto, dónde* o *cuándo* suelen estar asociadas a las cantidades desconocidas.
3. Enunciar los hechos conocidos y las relaciones entre las variables.
4. Determinar de cuál de las variables se desea encontrar el máximo o el mínimo y expresar esta variable como una función de *una* de las otras variables.
5. Encontrar los números críticos de la función obtenida en el paso 4 e investigar si corresponden a máximos o mínimos.
6. Verificar si hay máximos o mínimos en la frontera del dominio de la función que se obtuvo en el paso 4.
7. No desanimarse si no se puede resolver algún problema. Adquirir habilidad para resolver problemas aplicados toma una gran cantidad de esfuerzo y práctica. ¡Hay que seguir intentando!

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de la Guía (4.19).

EJEMPLO 1 Se desea construir una caja sin tapa con base rectangular a partir de una hoja rectangular de cartón de 16 cm de ancho y 21 cm de largo, recortando un cuadrado en cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Calcular el lado del cuadrado para el cual se obtiene una caja de volumen máximo.

Solución Aplicando el paso 2 de la Guía, comenzamos por trazar un croquis del cartón como se muestra en la Figura 4.34, en donde la letra x denota la longitud del lado del cuadrado que se va a recortar en cada esquina. Nótese que $0 \leq x \leq 8$. Usando el paso 3, escribimos los datos conocidos (el tamaño del rectángulo) en los lugares apropiados de la figura.

FIGURA 4.34

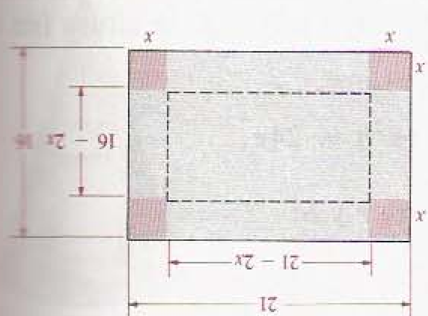
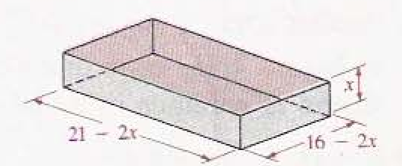


FIGURA 4.35



Después (paso 4), se ve que la cantidad cuyo máximo hay que encontrar es el volumen V de la caja que se formará doblando a lo largo de las líneas de trazos (véase la Figura 4.35). Continuando con el paso 4 de la Guía, expresamos V como una función de la variable x. De la Figura 4.35,

$$V = x(16 - 2x)(21 - 2x) = 2(168x - 37x^2 + 2x^3).$$

Esta ecuación expresa V como una función de x y buscamos ahora los números críticos para probar si son máximos o mínimos (paso 5). Derivando con respecto a x,

$$\begin{aligned} D_x V &= 2(168 - 74x + 6x^2) \\ &= 4(3x^2 - 37x + 84) \\ &= 4(3x - 28)(x - 3). \end{aligned}$$

Entonces, los números críticos solamente pueden ser $\frac{28}{3}$ y 3. Como $\frac{28}{3}$ está fuera del dominio de x, el único número crítico es 3.

Ahora se aplica el Criterio de la Segunda Derivada para los valores extremos. La segunda derivada de V es

$$D_x^2 V = 2(-74 + 12x) = 4(6x - 37).$$

Sustituyendo x por el número crítico 3 obtenemos

$$D_x^2 V = 4(18 - 37) = -76 < 0$$

y por lo tanto, V tiene un máximo local en $x = 3$.

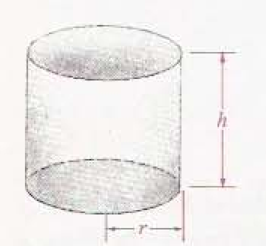
Finalmente, se ve si hay valores extremos en la frontera (paso 6). Como $0 \leq x \leq 8$ y $V = 0$ para $x = 0$ y $x = 8$, el valor máximo de V no se alcanza en una frontera del dominio de x. Por lo tanto, para obtener una caja de volumen máximo debe recortarse un cuadrado de 3 cm de lado en cada esquina de la hoja de cartón. •

En los siguientes ejemplos, no siempre se señalan los pasos de la Guía cuando se utilizan, pero el lector debe poder reconocerlos al estudiar las soluciones.

EJEMPLO 2 Se desea elaborar un pequeño recipiente cilíndrico sin tapa que tenga un volumen de 24π cm^3. El material que se usa para la base cuesta tres veces más que el que se emplea para la parte cilíndrica. Suponiendo que en la construcción no se desperdicia material, evaluar las dimensiones para las que es mínimo el costo del material de fabricación.

Solución Comenzamos por trazar un esquema del recipiente, como se muestra en la Figura 4.36, en la que r denota el radio de la base (en cm), y h, la altura (en cm). Como el volumen es de 24π cm^3,

FIGURA 4.36



$$\pi r^2 h = 24\pi.$$

Esto da una relación entre r y h:

$$h = \frac{24}{r^2}$$

El objetivo es minimizar el costo C del material utilizado para construir el recipiente.

Si a denota el costo por centímetro cuadrado (cm^2) del material a emplear para la parte curva, entonces el centímetro cuadrado del material que se use para la base costará $3a$ por cm^2. Por lo tanto, el costo del material para la parte cilíndrica es $a(2\pi rh)$ y el del material para la base es $3a(\pi r^2)$. El costo C de todo el material es

$$C = 3a(\pi r^2) + a(2\pi rh) = a\pi(3r^2 + 2rh)$$

o, como $h = 24/r^2$,

$$C = a\pi\left(3r^2 + \frac{48}{r}\right).$$

Como a es fijo, esta ecuación expresa C como una función de una variable r, como se recomienda en el paso 4 de la Guía. Para encontrar el valor de r que corresponde al valor mínimo de C, buscamos los números críticos. Derivando la ecuación anterior con respecto a r,

$$D_r C = a\pi\left(6r - \frac{48}{r^2}\right) = 6a\pi\left(\frac{r^3 - 8}{r^2}\right).$$

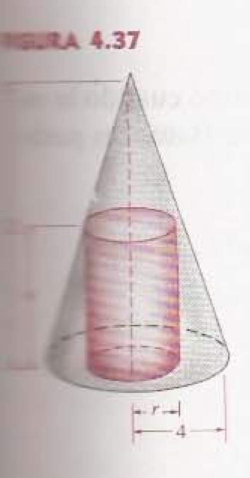
Como $D_r C = 0$ si $r = 2$, resulta que 2 es el único número crítico. (El número 0 no es número crítico porque C no está definido para $r = 0$.) Como $D_r C < 0$ para $r < 2$ y también $D_r C > 0$ para $r > 2$, del Criterio de la Primera Derivada se deduce que C también alcanza su valor mínimo cuando el radio del cilindro es de 2 cm. El valor correspondiente a la altura (que se obtiene de $h = 24/r^2$) es $\frac{24}{4}$ o sea 6 cm.

Ya que el dominio de la variable r es el intervalo infinito $(0, \infty)$, no puede haber valores extremos de frontera. •

EJEMPLO 3 Calcular el volumen máximo del cilindro circular recto que se puede inscribir en un cono de 12 cm de altura y 4 cm de radio en la base, de manera que los ejes del cilindro y del cono coincidan.

Solución El problema se ilustra en la Figura 4.37. La Figura 4.38 representa una sección transversal del cono y del cilindro que pasa por el eje de ambos. El volumen V del cilindro es $V = \pi r^2 h$. Para expresar V como función de una sola variable (paso 4 de la Guía), hay que obtener una relación entre r y h. Mediante los triángulos semejantes en la Figura 4.38 vemos que

FIGURA 4.37



$$\frac{h}{4-r} = \frac{12}{4} = 3 \quad \text{o bien} \quad h = 3(4-r).$$

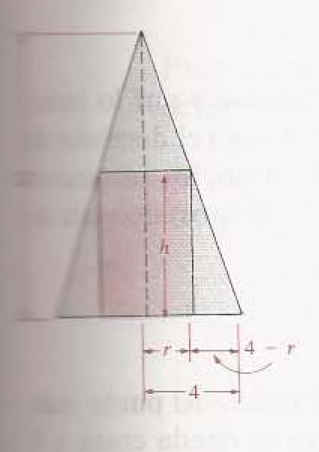
Por lo tanto,

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2[3(4-r)] = 3\pi r^2(4-r).$$

Si $r = 0$ o $r = 4$ entonces $V = 0$ y, así el volumen máximo no se alcanza en la frontera, de modo que basta analizar los máximos locales. Como $V = 3\pi(4r^2 - r^3)$,

$$D_r V = 3\pi(8r - 3r^2) = 3\pi r(8 - 3r).$$

FIGURA 4.38



Entonces, los números críticos de V son $r = 0$ y $r = \frac{8}{3}$. Apliquemos ahora el Criterio de la Segunda Derivada para $r = \frac{8}{3}$. Derivando $D_r V$ resulta

$$D_r^2 V = 3\pi(8 - 6r).$$

Sustituyendo r por $\frac{8}{3}$,

$$D_r^2 V = 3\pi[8 - 6(\tfrac{8}{3})] = 3\pi(8 - 16) = -24\pi < 0$$

lo que significa que el máximo se alcanza en $r = \frac{8}{3}$. El valor correspondiente para $h = 3(4-r)$ es

$$h = 3(4 - \tfrac{8}{3}) = 3(\tfrac{4}{3}) = 4.$$

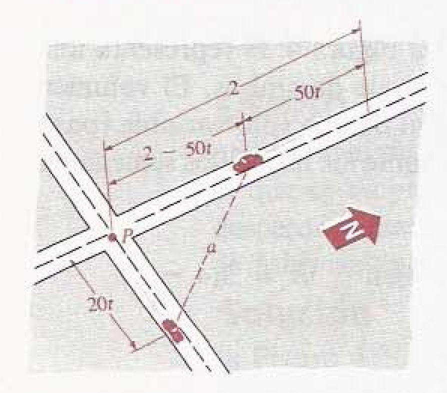
Por lo tanto, el volumen máximo del cilindro inscrito es

$$V = \pi\left(\frac{8}{3}\right)^2(4) = \pi\left(\frac{64}{9}\right)(4) = \frac{256\pi}{9} \approx 89.4 \text{ cm}^3 \quad \bullet$$

EJEMPLO 4 Una carretera que va de norte a sur y otra que va de este a oeste se cruzan en un punto P. Un vehículo que viaja hacia el este a 20 km/h, pasa por P a las 10:00 A.M. En ese mismo momento un automóvil que viaja hacia el sur a 50 km/h se encuentra

2 km al norte de P. Calcular cuándo se encuentran los dos vehículos más cerca uno del otro y cuál es la distancia mínima entre ellos.

FIGURA 4.39



Solución La Figura 4.39 muestra la posición de los automóviles al tiempo t (horas) después de las 10:00 A.M. El más lento está $20t$ km al este de P y el más veloz se halla $50t$ km al sur de la posición que tenía a las 10:00 A.M. y por lo tanto, su distancia a P es $2 - 50t$. Por el Teorema de Pitágoras, la distancia d entre los vehículos es

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(2-50t)^2 + (20t)^2} \\ &= \sqrt{4 - 200t + 2500t^2 + 400t^2} \\ &= \sqrt{4 - 200t + 2900t^2}. \end{aligned}$$

Evidentemente, d alcanza su valor mínimo cuando la expresión dentro del signo radical es mínima. Entonces podemos simplificar el trabajo estableciendo

$$f(t) = 4 - 200t + 2900t^2$$

y buscando el valor de t para el que f tiene un mínimo. Como

$$f'(t) = -200 + 5800t$$

el único número crítico de f es

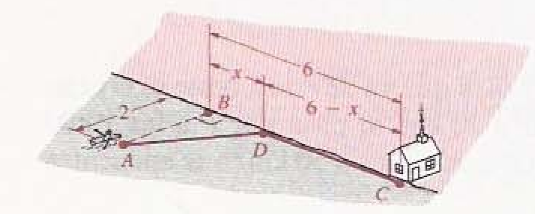
$$t = \frac{200}{5800} = \frac{1}{29}.$$

Como además $f''(t) = 5800$, la segunda derivada es siempre positiva y por lo tanto f tiene un mínimo local en $t = \frac{1}{29}$; de modo que $f(\frac{1}{29}) \approx 0.55$. Como el dominio de t es $[0, \infty)$ y $f(0) = 4$, no hay valor extremo en la frontera. Por lo tanto, los automóviles están más cerca uno del otro $\frac{1}{29}$ horas (aproximadamente 2.07 minutos) después de las 10:00 A.M. La distancia mínima es

$$\sqrt{f(\tfrac{1}{29})} \approx \sqrt{0.55} \approx 0.74 \text{ km.}$$

EJEMPLO 5 Un hombre que navega en una barca de remos a 2 millas del punto más cercano de una costa recta, desea llegar a su casa, la cual está en la citada costa a 6 millas de dicho punto. El hombre puede remar a razón de 3 mi/h y caminar a 5 mi/h. ¿Qué debe hacer para llegar a su casa en el menor tiempo posible?

FIGURA 4.40



Solución La Figura 4.40 ilustra el problema: A denota la posición de la barca, B el punto más cercano de la costa y C la casa; D es el punto donde el remero va a desembarcar y x denota la distancia de B a D. Entonces, los valores de x se restringen al intervalo $[0, 6]$.

Por el Teorema de Pitágoras, la distancia entre A y D es $\sqrt{x^2 + 4}$. Usando la fórmula *tiempo = distancia/veloci-*

dad, el tiempo que lleva al hombre remar de A a D es $\sqrt{x^2+4}/3$, y el tiempo que le toma caminar de D a C es $(6-x)/5$. Por lo tanto, el tiempo total T del recorrido es

$$T = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \frac{6-x}{5}$$

o, equivalentemente, $$T = \tfrac{1}{3}(x^2+4)^{1/2} + \tfrac{6}{5} - \tfrac{1}{5}x.$$

Deseamos encontrar el valor mínimo de T. Nótese que $x = 0$ corresponde al caso extremo en que la persona rema directamente hasta B y luego camina toda la distancia de B a su casa. Si $x = 6$, el hombre rema directamente de A a su casa. Estos números se pueden considerar los extremos del dominio de T. Si $x = 0$, entonces de la fórmula para T,

$$T = \frac{\sqrt{4}}{3} + \frac{6}{5} - 0 = \frac{28}{15} \approx 1.87$$

que es aproximadamente 1 hora con 52 minutos. Si $x = 6$, entonces

$$T = \frac{\sqrt{40}}{3} + \frac{6}{5} - \frac{6}{5} = \frac{2\sqrt{10}}{3} \approx 2.11$$

que son aproximadamente 2 horas 7 minutos.

Derivando la fórmula general de T vemos que

$$D_x T = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(x^2+4)^{-1/2}(2x) - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{x}{3(x^2+4)^{1/2}} - \frac{1}{5}.$$

Para encontrar los números críticos se hace $D_x T = 0$. Esto lleva a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{x}{3(x^2+4)^{1/2}} = \frac{1}{5}$$

$$5x = 3(x^2+4)^{1/2}$$

$$25x^2 = 9(x^2+4)$$

$$16x^2 = 36$$

$$x^2 = \tfrac{36}{16}$$

$$x = \tfrac{6}{4} = \tfrac{3}{2}$$

Por lo tanto, $\frac{3}{2}$ es el único número crítico. Ahora se utiliza el Criterio de la Segunda Derivada. Aplicando la Regla del Cociente a la fórmula $D_x T$,

$$D_x^2 T = \frac{3(x^2+4)^{1/2} - x\cdot 3(\frac{1}{2})(x^2+4)^{-1/2}(2x)}{9(x^2+4)}$$

$$= \frac{3(x^2+4) - 3x^2}{9(x^2+4)^{3/2}} = \frac{4}{3(x^2+4)^{3/2}}$$

que es positiva en $x = \frac{3}{2}$. Entonces, T tiene un mínimo local en $x = \frac{3}{2}$. El tiempo T correspondiente a $x = \frac{3}{2}$ es

$$T = \tfrac{1}{3}(\tfrac{9}{4} + 4)^{1/2} + \tfrac{6}{5} - \tfrac{3}{10} = \tfrac{26}{15}$$

o de modo equivalente, 1 hora 44 minutos.

Anteriormente examinamos los valores de T en los extremos del dominio obteniendo tiempos de 1 hora 52 minutos y más de 2 horas. Entonces, el valor mínimo de T se alcanza con $x = \frac{3}{2}$ y, por lo tanto, el hombre debe desembarcar entre B y C a $1\frac{1}{2}$ millas de B. El Ejercicio 6 es un problema parecido en el que el tiempo mínimo se alcanza en uno de los extremos del dominio. •

EJEMPLO 6 Un alambre de 60 cm de largo se va a partir en dos trozos. Una de las partes va a doblarse en forma de circunferencia y la otra en forma de triángulo equilátero. ¿Cómo se debe cortar el alambre para que la suma de las áreas del círculo y del triángulo que se forman sea máxima, y cómo se debe cortar para que sea mínima?

FIGURA 4.41

$2\pi r = x$ $\quad$ $3s = 60 - x$

Solución Denotemos por x la longitud de una de las partes del alambre. Entonces la longitud de la otra parte es $60 - x$. Supongamos que el trozo de longitud x es el que se dobla para formar una circunferencia y que r es el radio de la misma. Entonces $2\pi r = x$, o $r = x/2\pi$ (véase la Figura 4.41). Si al otro trozo se le da forma de triángulo equilátero y s es la longitud de cada lado, entonces $3s = 60 - x$ o sea $s = (60 - x)/3$. El área del círculo es

$$\pi r^2 = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)x^2$$

y el área del triángulo equilátero es

$$\frac{\sqrt{3}}{4}s^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{60 - x}{3}\right)^2.$$

La suma de las áreas, A, está dada por

$$A = \left(\frac{1}{4\pi}\right)x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{36}\right)(60 - x)^2.$$

Ahora se buscan los números críticos. Derivando,

$$D_x A = \left(\frac{1}{2\pi}\right)x - \left(\frac{\sqrt{3}}{18}\right)(60 - x)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{3}}{18}\right)x - \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

De manera que $D_x A = 0$ si y sólo si

$$x = \frac{10\sqrt{3}/3}{(1/2\pi) + (\sqrt{3}/18)} \approx 22.61.$$

La segunda derivada

$$D_x^2 A = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{3}}{18}$$

es siempre positiva y por lo tanto el número crítico indicado corresponde a un mínimo de A. Este valor mínimo es aproximadamente

$$A \approx \frac{1}{4\pi}(22.61)^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}(60 - 22.61)^2 \approx 107.94 \text{ cm}^2.$$

Como no hay otros números críticos, A debe alcanzar su máximo en la frontera. Si $x = 0$, entonces todo el alambre se usa para formar un triángulo y

$$A = \frac{\sqrt{3}}{36}(60)^2 \approx 173.21 \text{ cm}^2.$$

Si $x = 60$, entonces todo el alambre se usa para formar la circunferencia y

$$A = \frac{1}{4\pi}(60)^2 \approx 268.48 \text{ cm}^2.$$

Por lo tanto, A alcanza su valor máximo si el alambre no se parte sino que se usa todo para formar la circunferencia. •

EJERCICIOS 4.5

1. Se quiere construir una caja de base cuadrada y sin tapa que tenga un volumen de 4 dm^3 (decímetros cúbicos). Encuentre las dimensiones que minimicen la cantidad de material necesario (desprecie el espesor del material y lo que se desperdicia en la construcción).

2. Resuelva el Ejercicio 1 suponiendo que la caja ha de tener tapa.

3. Se desea construir un recipiente cilíndrico de metal sin tapa que tenga una capacidad de 1 m^3 (metro cúbico). Encuentre las dimensiones que debe tener para que la cantidad de material sea mínima, suponiendo que no se desperdicia nada en la construcción.

4. La base circular del recipiente del Ejercicio 3 se corta de una hoja cuadrada y el metal restante se desperdicia. Calcule las dimensiones del recipiente para las cuales la cantidad de material necesario en la construcción sea mínima.

5. Un veterinario cuenta con 30 m de tela de alambre y quiere construir 6 jaulas para perros levantando primero una cerca alrededor de una región rectangular, y dividiendo luego la región en seis rectángulos iguales mediante cinco rejas paralelas a uno de los lados. ¿Cuáles son las dimensiones de la zona rectangular para las que el área total es máxima?

6. Consulte el Ejemplo 5 de esta sección. Si el hombre tiene una lancha de motor que puede viajar a 15 mi/h, ¿qué debe hacer para llegar en el menor tiempo posible?

7. A la 1:00 P.M. el barco A se encuentra 30 millas al sur del barco B y viaja hacia el norte a 15 mi/h. El barco B navega hacia el oeste a 10 mi/h. ¿A qué hora se alcanza la distancia mínima entre las dos embarcaciones? (Véase la figura.)

EJERCICIO 7

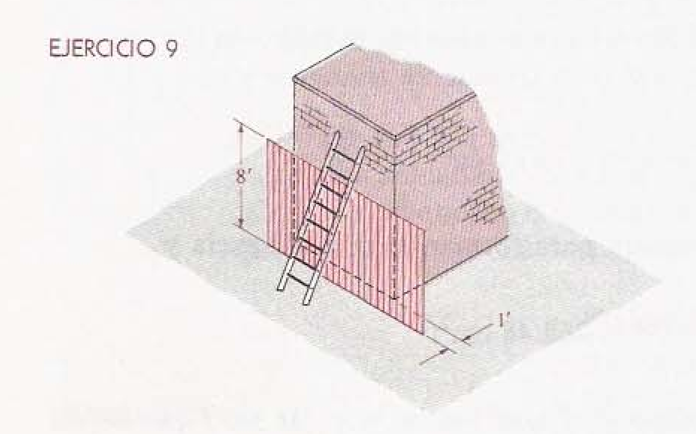
BARCO B
z
d
N
BARCO A

8. Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Halle las dimensio-

nes de la ventana que permiten admitir más luz suponiendo que el perímetro debe ser de 5 m.

9. Una cerca de 8 pie de alto al nivel del suelo va paralela a un edificio alto (véase la figura). La cerca dista 1 pie del edificio. Calcule la longitud de la escalera más corta que se puede apoyar entre el suelo y el edificio por encima de la reja. (*Sugerencia:* Utilice triángulos semejantes.)

EJERCICIO 9

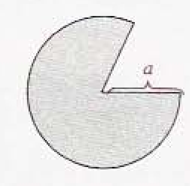


10. Se desea que las páginas de un libro tengan un área de 900 cm^2 con márgenes de 2.5 cm abajo y a los lados, y de 1.5 cm arriba. Determine las dimensiones de la página que darán la mayor área posible para el texto.

11. Se desea construir un almacén con un volumen de 100 m^3 que tenga techo plano y base rectangular cuya anchura sea tres cuartas partes de su longitud. El costo por metro cúbico de los materiales es de \$36 (dólares) para el piso, \$54 para los lados y \$27 para el techo. ¿Qué dimensiones minimizan el costo?

12. Se va a construir un vaso de papel en forma de cono circular recto quitando un sector circular a una hoja de papel con forma de círculo y radio a, y uniendo después las dos orillas rectas del papel restante (véase la figura). Calcule el volumen del vaso más grande que se pueda construir.

EJERCICIO 12



13. Un granjero tiene 150 m de material para cercar un campo con forma rectangular y quiere usar un granero como parte de uno de los lados del rreno (véase la figura). Demuestre que el área cercada es máxima cuando en vez de rectángulo se tiene un cuadrado.

EJERCICIO 13

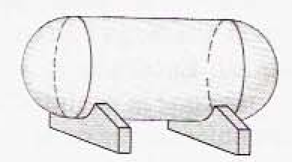
14. Consulte el Ejercicio 13. Suponga que el granjero desea cercar un área rectangular de A metros cuadrados. Demuestre que la figura que requiere menos material para la cerca es un cuadrado.

15. Un hotel que cobra \$80 (dólares) diarios por habitación da precios especiales a grupos que reserven entre 30 y 60 habitaciones. Si se ocupan más de 30 cuartos, el precio disminuye en \$1 por cada cuarto arriba de los 30. En estas condiciones, ¿la ocupación de cuántas habitaciones por un grupo producirá el ingreso máximo para el hotel?

16. Consulte el Ejercicio 15. Suponga que cada cuarto ocupado cuesta al hotel \$6 al día por limpieza y mantenimiento. En este caso, ¿cuántas habitaciones ocupadas por un grupo producen el ingreso neto máximo?

17. Se desea construir un tanque de acero con la forma de un cilindro circular recto y semiesferas en los extremos (véase la figura) para almacenar gas propano. El costo por pie cuadrado de los extremos es el doble del de la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de 10π pie^3?

EJERCICIO 17



18. Se desea construir un oleoducto de un punto A a otro punto B que distan 5 km y se encuentran en riberas opuestas de un río de cauce recto de 1.5 km de ancho. El oleoducto irá bajo el agua de A a un punto C en la ribera opuesta y luego sobre el suelo de C a B. El costo por kilómetro de tubería bajo el agua es cuádruple del costo sobre tierra. Calcule la posición de C que mini-

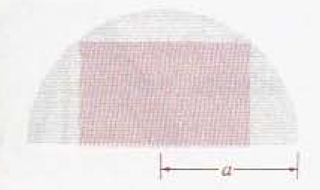
mizará el costo (desprecie la pendiente del lecho del río).

DIBUJO 18



19. Determine las dimensiones del rectángulo que se puede inscribir en un semicírculo de radio A de manera que dos de sus vértices estén sobre el diámetro (véase la figura).

DIBUJO 19



20. Encuentre las dimensiones del mayor rectángulo que se puede inscribir en un triángulo equilátero de lado a, de manera que dos de sus vértices estén en un mismo lado del triángulo.

21. Calcule el volumen del cono circular recto más grande que se puede inscribir en una esfera de radio a.

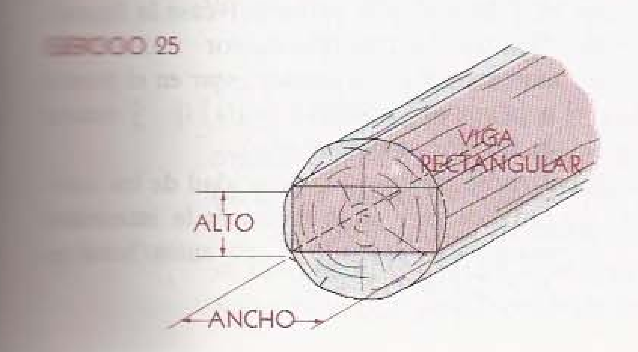
22. Calcule las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que se puede inscribir en una esfera de radio a.

23. Encuentre el punto de la gráfica de $y = x^2 + 1$ más cercano al punto (3, 1).

24. Encuentre el punto de la gráfica de $y = x^3$ más cercano al punto (4, 0).

25. La resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional al producto del ancho y el cuadrado de la altura de su sección transversal. Halle las dimensiones de la viga más resistente que se pueda obtener de un tronco circular de radio a (véase la figura).

DIBUJO 95



26. La iluminación producida por una fuente de luz es directamente proporcional a la intensidad luminosa de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la misma. Dos fuentes de luz de intensidades S_1 y S_2 están separadas una distancia d. ¿En qué punto del segmento que las une es mínima la iluminación?

27. Un mayorista vende zapatos para correr a \$20 (dólares) el par si le piden menos de 50 pares. Si le piden más de 50 (hasta 600), el precio por par se reduce en \$0.02 multiplicados por el volumen del pedido. ¿cuál es el pedido que produce el mayor ingreso para el mayorista?

28. Se desea construir un vaso de papel en forma de cono circular recto que tenga un volumen de 36π cm^3. Encuentre las dimensiones que requieren menor cantidad de papel (desprecie cualquier desperdicio en la construcción).

29. Un alambre de 36 cm de largo se va a partir en dos trozos. Una de las partes se ha de doblar en forma de triángulo equilátero y la otra en forma de un rectángulo cuya longitud es el doble de su anchura. ¿Cómo se debe partir el alambre para que la suma de las áreas del triángulo y el rectángulo sea (a) mínima y (b) máxima?

30. Un triángulo isósceles tiene base b y lados iguales de longitud a. Encuentre las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en el triángulo de manera que uno de sus lados coincida con la base del triángulo?

31. Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado por un triángulo equilátero. Encuentre las dimensiones del rectángulo para el cual el área de la ventana es máxima, si el perímetro de la misma debe ser de 12 pie.

32. Dos postes verticales de 3 y 4 metros se hallan clavados en un suelo a nivel y sus bases distan 5 m. Calcule la longitud mínima de cable que se necesita para tener dos tramos rectos: desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo, y de ahí hasta la punta del otro poste.

33. Demuestre que el rectángulo de mayor área con un perímetro dado p es un cuadrado.

34. Girando un rectángulo de perímetro p alrededor de uno de sus lados, se genera un cilindro circular recto. Calcule las dimensiones del rectángulo que producen el cilindro de mayor volumen.

35. El propietario de un huerto de manzanas calcula que si siembra 24 árboles por acre, entonces cada árbol adulto dará 600 manzanas al año. Por cada tres árboles más que se planten por acre, el número de manzanas que produce cada árbol disminuye en 12 al año. ¿Cuántos árboles se deben plantar por acre para obtener al mayor número posible de manzanas al año?

36. Una compañía inmobiliaria posee 180 apartamentos pequeños que están todos ocupados cuando la renta o alquiler es de \$300 al mes. La compañía calcula que por cada incremento de \$10 en la renta, se desocuparán cinco apartamentos. ¿Qué renta debe cobrar para obtener la mayor ganancia bruta?

37. Para que un paquete pueda enviarse por correo es necesario que la suma de su longitud y el perímetro de su base no exceda de 108 pulg. Encuentre las dimensiones de la caja con base cuadrada de mayor volumen que se puede enviar por correo.

38. Una carretera A que va de norte a sur y otra carretera B que va de este a oeste se cruzan en un punto P. A las 10:00 A.M. un automóvil pasa por P viajando hacia el norte sobre A a 80 km/h. En ese mismo momento, un avión que vuela hacia el este a 320 km/h y a una altura de 8500 m, pasa exactamente por arriba del punto de la carretera B que se encuentra 160 km al oeste de P. Suponiendo que el automóvil y el avión mantienen la misma velocidad y dirección, ¿a qué hora se encontrarán más cerca uno del otro?

39. Dos fábricas A y B que se encuentran a 4 millas una de la otra, emiten humo con partículas que contaminan el aire de la región. Suponga que el número de partículas provenientes de cada fábrica es directamente proporcional a la cantidad de humo e inversamente proporcional al cubo de la distancia desde la fábrica. ¿Qué punto entre A y B tendrá la menor contaminación si la fábrica A emite el doble de humo que la fábrica B?

40. Un campo petrolero tiene ocho pozos que producen un total de 1600 barriles de crudo al día. Por cada pozo nuevo que se tiene, la producción media por pozo disminuye en 10 barriles diarios. ¿Cuántos pozos adicionales se deben formar para obtener la mayor producción de crudo al día?

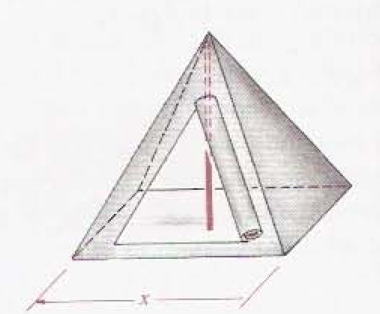
41. Se desea construir una tienda de campaña con forma de pirámide de base cuadrada. Un poste de metal colocado en el centro será el soporte de la tienda (véase la figura). Se cuenta con S pies de lona para los cuatro lados del albergue y x es la longitud de la base. Demuestre que

(a) El volumen V de la tienda es

$$V = \tfrac{1}{6}x\sqrt{S^2 - x^4}.$$

(b) V alcanza un valor máximo cuando $x =$ [illegible] veces la longitud del poste.

EJERCICIO 41



42. Un barco debe navegar 100 millas río arriba contra una corriente de 10 mi/h. Sea v la velocidad del barco (en mi/h). El número de galones de gasolina que consume la nave es directamente proporcional a v^2.

(a) Demuestre que si se mantiene la velocidad constante de v mi/h, entonces el número total y de galones de combustible que se consumen está dado por $y = 100kv^2/(v - 10)$, donde $v > 10$ y K una constante positiva.

(b) Calcule la velocidad que minimiza el número de galones de gasolina que se consumen durante el viaje.

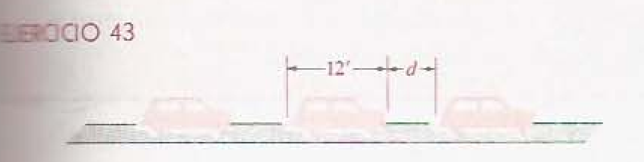
43. Unos autómoviles recorren un puente de 1 milla de longitud. Cada vehículo mide 12 pie de largo y debe mantenerse a una distancia mínima d (en pies) del coche de enfrente (véase la figura).

(a) Demuestre que el mayor número de automóviles que pueden estar en el puente a la vez es $[\![5280/(12 + d)]\!]$ ($[\![\ ]\!]$ denota la función mayor entero).

(b) Demuestre que si la velocidad de los automóviles es v mi/h entonces la intensidad máxima de tránsito F (en autos/hora) es $F = 5280v/(12 + d)$.

(c) La distancia de frenado (en pies) de un coche que va a v mi/h es aproximadamente $0.05v^2$.

EJERCICIO 43



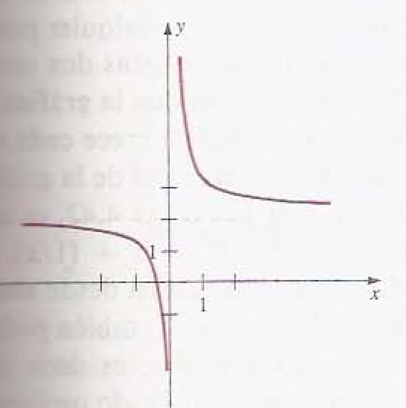
Sea $d = 0.025v^2$. Determine la velocidad para la que se logra la máxima circulación.

44. Demuestre que la distancia mínima de un punto (x_1, y_1) a la gráfica de una función derivable f se alcanza a lo largo de una recta normal a la gráfica, es decir, sobre una perpendicular a la tangente.

4.6 LÍMITES AL INFINITO Y LÍMITES INFINITOS

En esta sección se consideran funciones cuyos valores se "estabilizan" cuando $|x|$ se hace muy grande. También se consideran funciones que no tienen un mínimo absoluto ni un máximo absoluto, pero tienen en cambio, la propiedad de que $|f(x)|$ puede tomar valores arbitrariamente grandes. Cuando los resultados del análisis se aplican a la derivada f' se obtiene información acerca de las rectas verticales tangentes a la gráfica de f.

FIGURA 4.42



Consideremos primero la gráfica de $f(x) = 2 + (1/x)$ que aparece en la Figura 4.42 y estudiemos los valores de $f(x)$ para x grande y positiva. Por ejemplo,

$$f(100) = 2.01$$
$$f(1000) = 2.001$$
$$f(10\,000) = 2.0001$$
$$f(100\,000) = 2.00001$$

Puede lograrse que $f(x)$ se acerque a 2 tanto como se quiera o, equivalentemente, que $|f(x) - 2|$ sea arbitrariamente pequeño, si se escoge x suficientemente grande. Este comportamiento de $f(x)$ se expresa por

$$\lim_{x \to \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$$

lo cual se lee: *el límite de* $2 + (1/x)$ *cuando* x *tiende a* ∞ *es* 2.

Es importante recordar que no se puede sustituir nunca la variable x por ∞ (infinito) puesto que éste no es un número real. Entonces la expresión x *tiende a* ∞ no significa que la variable x tienda o se acerque a algún número real, sino que x crece indefinidamente o se le asignan valores arbitrariamente grandes. Más adelante, en la Definición (4.25) se utiliza el símbolo ∞ en un contexto diferente.

A continuación se define $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ para una función arbitraria f. Como se hizo en el Capítulo 2, se da primero una definición informal y después una formal. Se supone que f está definida en un intervalo infinito (c, ∞) para algún número real c.

DEFINICIÓN (4.20) INFORMAL

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que $f(x)$ se puede acercar arbitrariamente a L escogiendo x suficientemente grande.

DEFINICIÓN (4.21)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

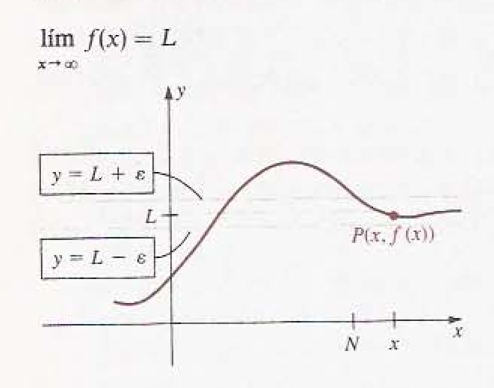
significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe un número positivo N tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad x > N.$$

Si $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, se dice que **el límite de $f(x)$ cuando x tiende a ∞ es L.**

A continuación se da una interpretación geométrica de la Definición (4.21). Supóngase que $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ y consideremos dos rectas horizontales $y = L \pm \varepsilon$ (véase la Figura 4.43). De acuerdo con la Definición (4.21), si x es mayor que cierto número positivo N, entonces cualquier punto $P(x, f(x))$ de la gráfica se encuentra entre estas dos rectas horizontales. Informalmente puede decirse que la gráfica de f se va acercando a la recta $y = L$ cuando x crece cada vez más. La recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de f. Por ejemplo, la recta $y = 2$ de la Figura 4.42, es una asíntota horizontal de la gráfica de $f(x) = 2 + (1/x)$.

FIGURA 4.43



En la Figura 4.43, la gráfica de f se acerca desde abajo a la asíntota $y = L$, es decir con $f(x) < L$. También podría una gráfica acercarse a $y = L$ desde arriba, es decir con $f(x) > L$. Asimismo, podría acercarse la gráfica a la recta horizontal de modo oscilante, es decir, a veces desde arriba y a veces desde abajo de ella.

La siguiente definición abarca el caso en que $|x|$ es grande pero x es *negativa*. Se supone que f está definida en un intervalo infinito $(-\infty, c)$ para algún número real c.

DEFINICIÓN (4.22)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe un número negativo N tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad x < N$$

Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, se dice que el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$ es L**. La Figura 4.44 ilustra la Definición (4.22). Si se consideran dos rectas horizontales $y =$

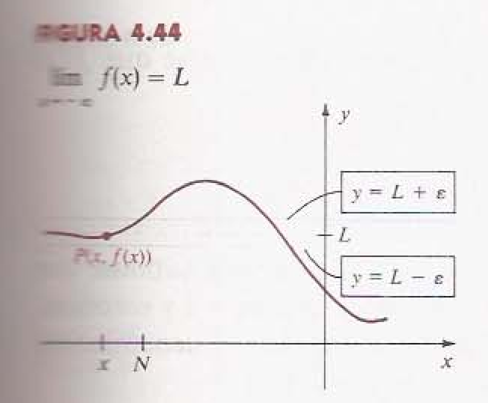


FIGURA 4.44
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

$L \pm \varepsilon$, entonces cuando x es *menor* que cierto número negativo N, todos los puntos $P(x, f(x))$ de la gráfica se encuentran entre ellas. Como antes, la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

Pueden obtenerse teoremas sobre límites análogos a los del Capítulo 2 para estos límites al infinito. En particular, el Teorema (2.15) sobre límites de sumas, productos y cocientes es válido también para los casos $x \to \infty$ o bien $x \to -\infty$. Análogamente, el Teorema (2.21) que se refiere al límite de $\sqrt[n]{f(x)}$ también es cierto para $x \to \infty$ o bien $x \to -\infty$. Finalmente, es trivial demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} c = c \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} c = c.$$

El teorema que sigue es importante para el cálculo de límites específicos.

TEOREMA (4.23)

Sean k un número racional positivo y c un número real arbitrario. Entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^k} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^k} = 0$$

siempre y cuando x^k esté definido.

Demostración Para deducir que $\lim_{x\to\infty} (c/x^k) = 0$ a partir de (4.21), debe demostrarse que para todo $\varepsilon > 0$, existe un número positivo N tal que

$$\left| \frac{c}{x^k} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad x > N.$$

Si $c = 0$, se puede usar cualquier $N > 0$. Si $c \neq 0$, las siguientes cuatro desigualdades son equivalentes para $x > 0$:

$$\left| \frac{c}{x^k} - 0 \right| < \varepsilon, \qquad \frac{|x|^k}{|c|} > \frac{1}{\varepsilon}, \qquad |x|^k > \frac{|c|}{\varepsilon}, \qquad x > \left(\frac{|c|}{\varepsilon} \right)^{1/k}$$

La última desigualdad da una idea para elegir N. Tomando $N = (|c|/\varepsilon)^{1/k}$ se ve que para $x > N$, la cuarta desigualdad se satisface, y por lo tanto también la primera, que es lo que se quería demostrar. La segunda parte del teorema se demuestra de manera análoga. (N es entero positivo.) • •

Si f es una función racional, pueden calcularse los límites cuando $x \to \infty$ o bien $x \to -\infty$ dividiendo primero el numerador y el denominador de $f(x)$ entre una potencia adecuada de x y aplicando después el Teorema (4.23). Concretamente, supongamos que $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios y se desea analizar $f(x) = g(x)/h(x)$. Si el grado k de $h(x)$ es mayor que o igual al de $g(x)$, hay que dividir el numerador y el denominador

entre x^k. Si el grado de $g(x)$ es mayor que el de $h(x)$, puede demostrarse que $f(x)$ no tiene límite cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$.

EJEMPLO 1 Analizar $\lim\limits_{x\to-\infty} = \dfrac{2x^2 - 5}{3x^2 + x + 2}$.

Solución Como sólo interesan los valores negativos de x, podemos suponer que $x \neq 0$. Los grados del numerador y del denominador son ambos iguales a 2 y entonces, siguiendo la regla enunciada en el párrafo anterior, dividimos numerador y denominador entre x^2 y luego se aplican los teoremas sobre límites. De modo que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - 5}{3x^2 + x + 2} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2 - (5/x^2)}{3 + (1/x) + (2/x^2)} \\ &= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} [2 - (5/x^2)]}{\lim\limits_{x\to-\infty} [3 + (1/x) + (2/x^2)]} \\ &= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} 2 - \lim\limits_{x\to-\infty} (5/x^2)}{\lim\limits_{x\to-\infty} 3 + \lim\limits_{x\to-\infty} (1/x) + \lim\limits_{x\to-\infty} (2/x^2)} \\ &= \frac{2 - 0}{3 + 0 + 0} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la recta $y = \frac{2}{3}$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f. •

EJEMPLO 2 Sea $f(x) = 4x/(x^2 + 9)$. Determinar las asíntotas horizontales, obtener los máximos y mínimos locales y los puntos de inflexión, analizar la concavidad y trazar luego la gráfica de f.

Solución Como el grado del númerador (1) es menor que el grado del denominador (2), dividimos el numerador y el denominador entre x^2 y usamos los teoremas sobre límites como sigue:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2 + 9} = \lim_{x\to\infty} \frac{(4/x)}{1 + (9/x^2)} \\ &= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} (4/x)}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} (9/x^2)} = \frac{0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la gráfica de f. Análogamente $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Podemos verificar que

$$f'(x) = \frac{4(9 - x^2)}{(x^2 + 9)^2} \quad \text{y} \quad f''(x) = \frac{8x(x^2 - 27)}{(x^2 + 9)^3}.$$

Los números críticos de f son las soluciones de $f'(x) = 0$ y por lo tanto, son ± 3. Usando el Criterio de la Primera Derivada o el de la Segunda Derivada puede demostrarse que $f(-3)$ es un mínimo local y que $f(3)$ es un máximo local.





Usando $f''(x)$ vemos que los puntos de inflexión tienen abscisas 0 y $\pm\sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3}$. El signo de $f''(x)$ indica que la gráfica tiene concavidad hacia abajo en los intervalos $(-\infty, -3\sqrt{3})$ y $(0, 3\sqrt{3})$, y concavidad hacia arriba en $(-3\sqrt{3}, 0)$ y $(3\sqrt{3}, \infty)$. La gráfica se tiene en la Figura 4.45 con escalas diferentes en los ejes. •

EJEMPLO 3 Analizar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+2}}{3-4x}$.

Solución Si x es grande y positiva, el numerador $\sqrt{9x^2+2}$ se acerca a $\sqrt{9x^2}$, o bien $3x$. Esto sugiere dividir entre x el numerador y el denominador. Como $x = \sqrt{x^2}$ para valores positivos de x, entonces

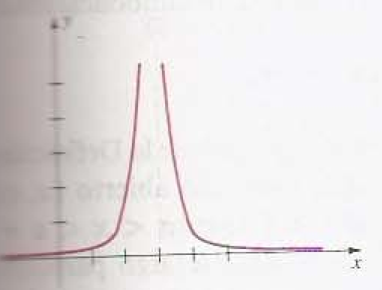
$$\frac{\sqrt{9x^2+2}}{x} = \frac{\sqrt{9x^2+2}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{\frac{9x^2+2}{x^2}} = \sqrt{9+\frac{2}{x^2}}$$

y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2+2}}{3-4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9+(2/x^2)}}{(3/x)-4} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{9+(2/x^2)}}{\lim\limits_{x\to\infty} [(3/x)-4]}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} [9+(2/x^2)]}}{\lim\limits_{x\to\infty} (3/x) - \lim\limits_{x\to\infty} 4} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 9 + \lim\limits_{x\to\infty} (2/x^2)}}{0-4}$$

$$= \frac{\sqrt{9+0}}{-4} = -\frac{3}{4}$$ •



Sea $f(x) = 1/(x-3)^2$. La gráfica de f está en la Figura 4.46. Si x se acerca a 3 (pero $x \neq 3$), el denominador $(x-3)^2$ se acerca a cero y por lo tanto, $f(x)$ es muy grande. Por ejemplo,

$f(2.9) = 100$	$f(3.1) = 100$
$f(2.99) = 10\,000$	$f(3.01) = 10\,000$
$f(2.999) = 1\,000\,000$	$f(3.001) = 1\,000\,000$

Evidentemente, podemos lograr que $f(x)$ tome valores tan grandes como queramos es cogiendo x suficientemente cercano a 3. Esto se expresa simbólicamente así:

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty.$$

La siguiente definición es un enunciado informal de este tipo de comportamiento para una función arbitraria f.

DEFINICIÓN (4.24) INFORMAL

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

significa que $f(x)$ se puede hacer tan grande como se quiera escogiendo x suficientemente cerca de a.

La definición formal, que puede servir para demostrar teoremas, se puede enunciar como sigue.

DEFINICIÓN (4.25) Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en a mismo. La afirmación **el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es ∞**, que se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

significa que a todo número positivo M le corresponde un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } f(x) > M.$$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, a veces se dice que $f(x)$ *tiende a infinito cuando x tiende hacia a* o que *crece indefinidamente cuando x tiende hacia a*. Si se considera la recta horizontal $y = M$ en la Figura 4.47, entonces cuando x está en un intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ adecuado, y $x \neq a$, los puntos $P(x, f(x))$ de la gráfica de f se encuentran *arriba* de la recta horizontal.

FIGURA 4.47

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

Recuérdese que el símbolo ∞ no representa un número real. En particular, $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ *no significa que el límite existe cuando x tiende a a*. La notación de límite se utiliza solamente para denotar el tipo de comportamiento de $f(x)$ descrito en el párrafo anterior.

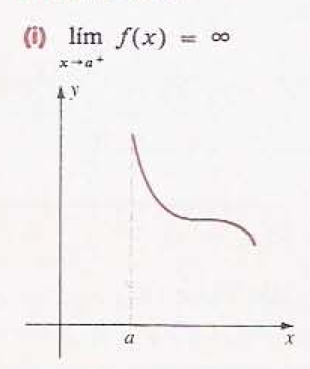
La noción de que $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a a por la derecha o por la izquierda se escribe simbólicamente

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty,$$

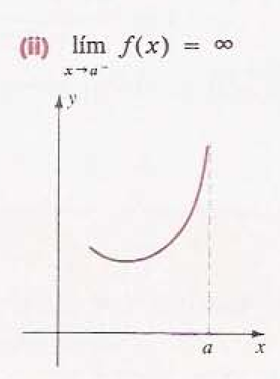
respectivamente. Estos conceptos se pueden definir modificando ligeramente la Definición (4.25). Así, para $x \to a^+$ se supone que $f(x)$ existe en algún intervalo abierto (a, c) y se cambia la desigualdad $0 < |x - a| < \delta$ de la Definición (4.25) por $a < x < a + \delta$, es decir, x sólo puede tomar valores *mayores* que a. Puede decirse algo parecido acerca de $x \to a^-$. La Figura 4.48 muestra unas gráficas que ilustran estas nociones.

FIGURA 4.48

(i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$



(ii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$



La siguiente definición es la análoga a la Definición (4.25) para el caso en que $|f(x)|$ es muy grande y $f(x)$ es negativa cuando x tiende a a.

DEFINICIÓN (4.26)

Sea f una función definida en todo un intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en a mismo. La afirmación **el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es $-\infty$**, que se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que a todo número negativo M le corresponde un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad f(x) < M.$$

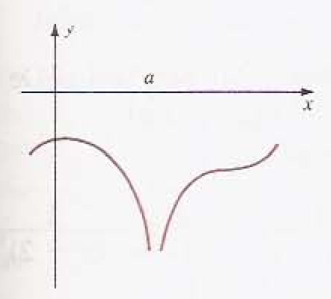
Si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, se dice a veces que $f(x)$ *tiende a menos infinito* o que *disminuye indefinidamente, cuando x tiende hacia a*.

La Figura 4.49 presenta gráficas que ilustran la Definición (4.26) incluyendo los casos $x \to a^+$ y $x \to a^-$.

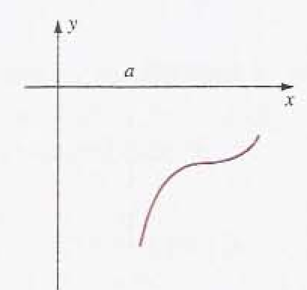
La recta $x = a$ en las Figuras 4.47-4.49 es una **asíntota vertical** de la gráfica de f. Nótese que f tiene una *discontinuidad infinita* en $x = a$ (véase la Sección 2.5).

FIGURA 4.49

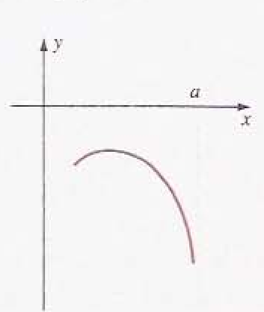
(i) $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$



(ii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$



(iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



Aunque se usa la notación de límite para describir el comportamiento de las funciones f correspondientes a las gráficas de la Figura 4.49, los límites cuando x tiende a a no existen. En el Ejemplo 3 de la Sección 2.3 se demostró que $\lim_{x \to 0}(1/x)$ no existe. Usando la nueva notación, este hecho (la inexistencia del límite) se denota por

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$$

El siguiente teorema, que se enuncia sin demostración, es útil para analizar los límites de las funciones racionales.

TEOREMA (4.27)

(i) Si n es un entero positivo par, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty$$

(ii) Si n es un entero positivo impar, entonces

$$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty.$$

Si n es un entero positivo y $f(x) = 1/(x-a)^n$ entonces, por el Teorema (4.27), la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de f. Nótese también que como $\lim_{x \to \infty} 1/(x-a)^n = 0$, el eje x es una asíntota horizontal.

EJEMPLO 4 Sea $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^3}$. Analizar $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ y $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ y trazar la gráfica de f.

Solución Para x cercano a 2 pero mayor que 2, $x - 2$ es un número positivo pequeño y entonces $1/(x-2)^3$ es un número positivo grande. Por lo tanto, es evidente que

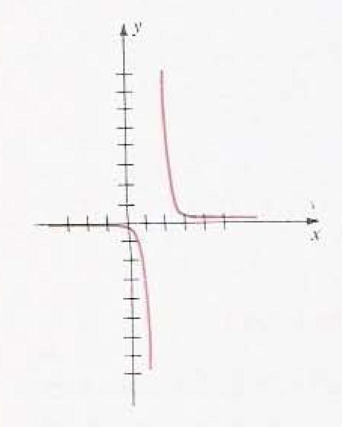
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)^3} = \infty.$$

Esto también se puede deducir del Teorema (4.27) (ii) con $a = 2$ y $n = 3$.

Para x cercano a 2 pero *menor* que 2, $x - 2$ es *negativo* y está cerca de 0. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)^3} = -\infty.$$

FIGURA 4.50



Esto también es consecuencia de (4.27) (ii). De modo que la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Se puede demostrar que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{(x-2)^3} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{(x-2)^3} = 0.$$

Entonces $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal.

La gráfica de f se tiene en la Figura 4.50. Nótese que f no tiene un máximo absoluto ni un mínimo absoluto.

A continuación se enunciarán algunas propiedades de las sumas, productos y cocientes de las funciones que tienden a infinito. Hay resultados análogos para los casos $x \to a^+$ y $x \to a^-$.

TEOREMA (4.28) Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$ para algún número c, entonces:

(i) $\lim_{x \to a} [g(x) + f(x)] = \infty$

(ii) Si $c > 0$, entonces $\lim_{x \to a} [g(x)f(x)] = \infty$ y

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

(iii) Si $c < 0$, entonces $\lim_{x \to a} [g(x)f(x)] = -\infty$ y

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

(iv) $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

Las conclusiones del Teorema (4.28) son intuitivamente evidentes. En (i), por ejemplo, si $g(x)$ tiende a c y $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a a, entonces $g(x) + f(x)$ se puede hacer tan grande como se quiera escogiendo x suficientemente cercano a a.

En (iii), si $\lim_{x \to a} g(x) = c < 0$ entonces $g(x)$ es negativa cuando x está cerca de a. Por tanto, si $f(x)$ es grande y positiva entonces cuando x está cercana a a, el producto $g(x)f(x)$ es *negativo* y $|g(x)f(x)|$ es grande. Esto indica que $\lim_{x \to a} g(x)f(x) = -\infty$.

No daremos una demostración formal del Teorema (4.28). Se puede enunciar un teorema análogo para $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$. También pueden demostrarse teoremas para operaciones con más de dos funciones.

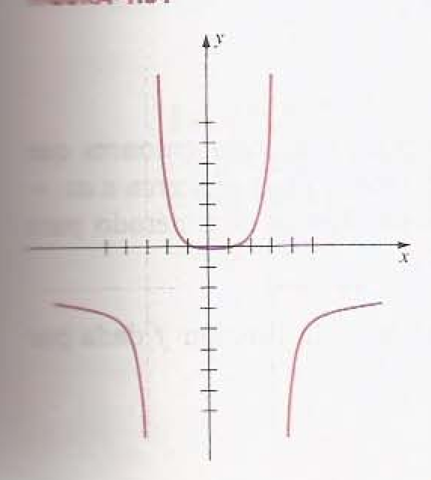
Las gráficas de funciones racionales suelen tener asíntotas verticales y horizontales. Las Figuras 4.42, 4.45, 4.46 y 4.50 y también el siguiente ejemplo, ilustran estos conceptos.

EJEMPLO 5 Sea $f(x) = 2x^2/(9 - x^2)$. Encontrar las asíntotas verticales y horizontales y trazar la gráfica de f.

Solución Comenzamos por factorizar el denominador, obteniendo así

$$f(x) = \frac{2x^2}{(3 - x)(3 + x)}.$$

FIGURA 4.51



El denominador es cero en $x = 3$ y $x = -3$. Las rectas correspondientes podrían ser asíntotas verticales. Como

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{3 - x} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 3^-} \frac{2x^2}{3 + x} = 3$$

del Teorema (4.28) (ii) se ve que

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \left(\frac{1}{3 - x}\right)\left(\frac{2x^2}{3 + x}\right) = \infty.$$

Además, como

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{3 - x} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 3^+} \frac{2x^2}{3 + x} = 3 > 0,$$

deducimos que

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \left(\frac{1}{3-x}\right)\left(\frac{2x^2}{3+x}\right) = -\infty .$$

Este comportamiento de $f(x)$ cerca de la asíntota vertical $x = 3$ se ilustra en la Figura 4.51.

Como

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{1}{3+x} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -3^-} \frac{2x^2}{3-x} = 3 > 0,$$

concluimos que

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \left(\frac{1}{3+x}\right)\left(\frac{2x^2}{3-x}\right) = -\infty.$$

Análogamente,

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{1}{3+x} = \infty \quad \text{implica que} \quad \lim_{x\to -3^+} f(x) = \infty.$$

Este comportamiento de $f(x)$ cerca de $x = -3$ se ilustra en la Figura 4.51.

Para encontrar las asíntotas verticales consideramos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{9-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{(9/x^2)-1} = -2.$$

Cuando $x \to -\infty$ el límite es el mismo. La recta $y = -2$ es una asíntota horizontal. Usando esta información y situando algunos puntos podemos obtener el croquis de la Figura 4.51.

Si queremos más información sobre la gráfica, es posible usar la primera derivada para demostrar que f es decreciente en los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(-3, 0]$, que es creciente en $[0, 3)$ y $(3, \infty)$, y que tiene un mínimo en $x = 0$, como se señala en la figura. Para analizar la concavidad puede usarse la segunda derivada. •

Si $f(x) = g(x)/h(x)$, donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios y *si el grado de $g(x)$ es igual al grado de $h(x)$ más uno*, entonces la gráfica de f tiene una **asíntota oblicua** con ecuación $y = ax + b$ para algunos números reales a y b; es decir, la gráfica tiende a esta recta cuando x tiende a más o menos infinito. Para demostrar este hecho puede usarse la división de polinomios y expresar $f(x)$ en la forma

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = (ax+b) + \frac{r(x)}{h(x)}$$

con $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ menor que el de $h(x)$. Se aprecia entonces que $\lim_{x\to\infty} r(x)/h(x) = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} r(x)/h(x) = 0$. Por lo tanto, $f(x)$ se acerca a $ax + b$ cuando x tiende a ∞ o bien a $-\infty$. El ejemplo siguiente ilustra este método para encontrar las asíntotas oblicuas.

EJEMPLO 6 Hallar todas las asíntotas y trazar la gráfica de la función f dada por

$$f(x) = \frac{x^2-9}{2x-4}$$

FIGURA 4.52

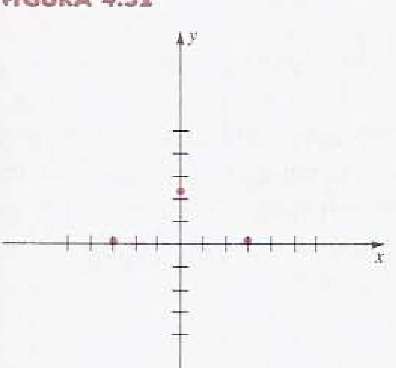
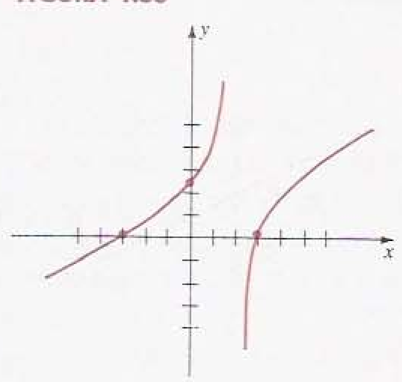


FIGURA 4.53



Solución Hay una asíntota vertical con ecuación $2x - 4 = 0$, es decir, $x = 2$. Además, como el grado del numerador $x^2 - 9$ es igual al grado del denominador $2x - 4$ más uno, la gráfica tiene una asíntota oblicua. Dividiendo polinomios,

$$\frac{x^2 - 9}{2x - 4} = (\tfrac{1}{2}x + 1) - \frac{5}{2x - 4}.$$

De acuerdo con la discusión anterior a este ejemplo, la recta $y = \frac{1}{2}x + 1$ es una asíntota oblicua. Esta recta y la asíntota vertical $x = 2$ se tienen (con líneas de trazos) en la Figura 4.52.

Las abscisas en el origen de la gráfica son las soluciones de la ecuación $x^2 - 9 = 0$, es decir 3 y −3. La ordenada en el origen es $f(0) = \frac{9}{4}$. En la Figura 4.52 están marcados estos puntos. Es fácil ver que la gráfica tiene la forma indicada en la Figura 4.53. •

Los límites infinitos sirven también para definir las rectas tangentes verticales. Si se considera una recta tangente l como la posición límite de una recta secante (véase la Figura 2.4), entonces l puede ser vertical. En tales casos, cuando la secante tiende hacia l su pendiente tiende a más o menos infinito. Esto motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN (4.29)

La gráfica de una función f tiene una **recta tangente vertical** en el punto $P(a, f(a))$ si f es continua en a y

$$\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty.$$

EJEMPLO 7 Sean $f(x) = (x - 8)^{1/3} + 1$ y $g(x) = (x - 8)^{2/3} + 1$. Demostrar que las gráficas de f y g tienen rectas tangentes verticales en $P(8, 1)$. Trazar las gráficas mostrando las rectas tangentes en P.

Solución Se tiene que f y g son ambas continuas en 8. Derivando,

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x - 8)^{-2/3} = \frac{1}{3(x - 8)^{2/3}}$$

$$g'(x) = \frac{2}{3}(x - 8)^{-1/3} = \frac{2}{3(x - 8)^{1/3}}.$$

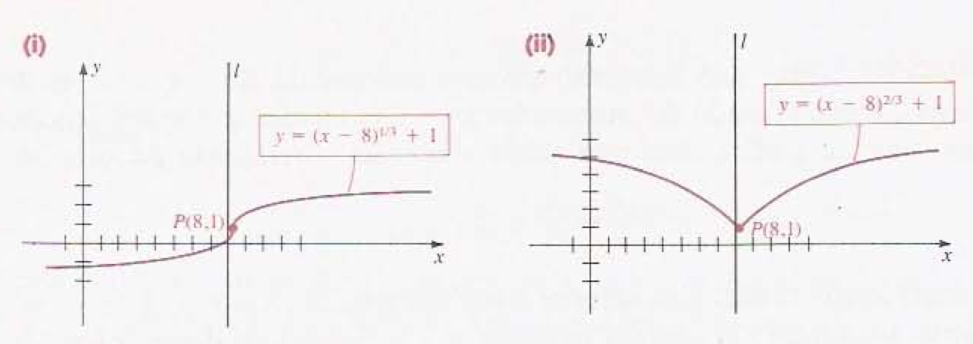
Es claro que

$$\lim_{x\to 8} |f'(x)| = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 8} |g'(x)| = \infty.$$

Por la Definición (4.29), ambas gráficas tienen una recta tangente vertical en $P(8, 1)$.

Las gráficas se tienen en la Figura 4.54. Nótese que en el caso de la gráfica de f en (i) la pendiente de la recta tangente tiende a infinito si x tiende a 8 por la derecha o por la izquierda. Sin embargo, para la gráfica de g en (ii) la pendiente tiende a menos infinito si $x \to 8^-$, y tiende a más infinito si $x \to 8^+$.

FIGURA 4.54



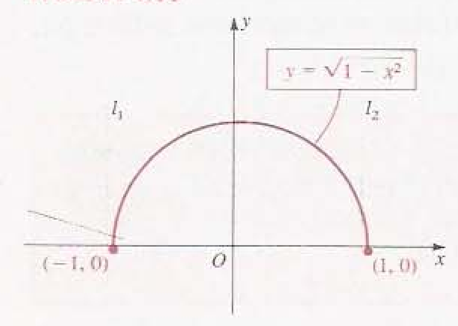
El número 8 es un número crítico de ambas funciones. Del Criterio de la Primera Derivada se deduce que $f(8) = 1$ no es un valor extremo de f y que $g(8) = 1$ es un mínimo absoluto de g. •

La Definición (4.29) puede ser modificada para considerar rectas tangentes verticales en los extremos del dominio de la función. Entonces, si f es una función continua en $[a, b]$ y no está definida fuera de este intervalo, la gráfica tiene una recta vertical en $P(a, f(a))$ o $Q(b, f(b))$ si

$$\lim_{x\to a^+} |f'(x)| = \infty \quad \text{o bien} \quad \lim_{x\to b^-} |f'(x)| = \infty,$$

respectivamente. Por ejemplo, si $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ entonces la gráfica de f es la mitad superior de una circunferencia unitaria con centro en el origen. Hay rectas tangentes verticales l_1 y l_2 en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, respectivamente (véase la Figura 4.55).

FIGURA 4.55



EJERCICIOS 4.6

Ejercicios 1-8: Calcule el límite.

1. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^2 - 3x + 1}{2x^2 + 4x - 7}$

2. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 - x + 1}{6x^3 + 2x^2 - 7}$

3. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4 - 7x}{2 + 3x}$

4. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{(3x + 4)(x - 1)}{(2x + 7)(x + 2)}$

5. $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{8 + x^2}{x(x + 1)}}$

6. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4x - 3}{\sqrt{x^2 + 1}}$

7. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x + 1}}{10 - 3x}$

8. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - x + 3}{x^3 + 1}$

Ejercicios 9-18: Efectúe el cálculo de $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$. Determine las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de f, calcule los máximos y mínimos locales de f y trace la gráfica.

9. $f(x) = \dfrac{5}{x-4}, \quad a = 4$

10. $f(x) = \dfrac{5}{4-x}, \quad a = 4$

11. $f(x) = \dfrac{8}{(2x+5)^3}, \quad a = -\frac{5}{2}$

12. $f(x) = \dfrac{-4}{7x+3}, \quad a = -\frac{3}{7}$

13. $f(x) = \dfrac{3x}{(x+8)^2}, \quad a = -8$

14. $f(x) = \dfrac{3x^2}{(2x-9)^2}, \quad a = \frac{9}{2}$

15. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-x-2}, \quad a = -1, \ a = 2$

16. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2-4x+3}, \quad a = 1, \ a = 3$

17. $f(x) = \dfrac{1}{x(x-3)^2}, \quad a = 0, \ a = 3$

18. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}, \quad a = -1$

Ejercicios 19-28: Encuentre las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de f y trácela.

19. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

20. $f(x) = \dfrac{5x}{4-x^2}$

21. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

22. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$

23. $f(x) = \dfrac{1}{x^3+x^2-6x}$

24. $f(x) = \dfrac{x^2-x}{16-x^2}$

25. $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+2x-3}$

26. $f(x) = \dfrac{x^2-5x}{x^2-25}$

27. $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2-16}$

28. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{16-x^2}}{4-x}$

Ejercicios 29-34: Encuentre las asíntotas verticales y oblicuas de la gráfica de f y trácela.

29. $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x+1}$

30. $f(x) = \dfrac{2x^2-x-3}{x-2}$

31. $f(x) = \dfrac{8-x^3}{2x^2}$

32. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-9}$

33. $f(x) = \dfrac{x^4-4}{x^3-1}$

34. $f(x) = \dfrac{1-x^4}{2x^3-8x}$

Ejercicios 35-38: Determine los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente es vertical.

35. $f(x) = x(x+2)^{3/5}$

36. $f(x) = \sqrt{x+2}$

37. $f(x) = \sqrt{16-9x^2} + 3$

38. $f(x) = \sqrt[3]{x} - 5$

39. A un tanque que contiene una cantidad inicial de 200 L (litros) de agua pura, le llega agua salada con una concentración de 50 g (gramos) de sal por litro.
    (a) Si llegan al tanque 20 L de agua salada por minuto, ¿cuál es el volumen $V(t)$ del agua y cuál es la cantidad $Q(t)$ de sal en el tanque en el tiempo t?
    (b) Demuestre que la concentración $c(t)$ de sal al tiempo t está dada por
    $$c(t) = t/(10t + 100).$$
    (c) Describa el comportamiento de $c(t)$ cuando $t \to \infty$.

40. Uno de los problemas importantes en la ciencia pesquera es la predicción para el año siguiente de la población adulta R con capacidad de reproducción a partir de la población S que está desovando. Para algunas especies (como el arenque del mar del Norte) R está dada en función de S por $R = aS/(S + b)$. ¿Cómo se puede interpretar la constante a? Muestre que para valores grandes de S, entonces R es más o menos constante.

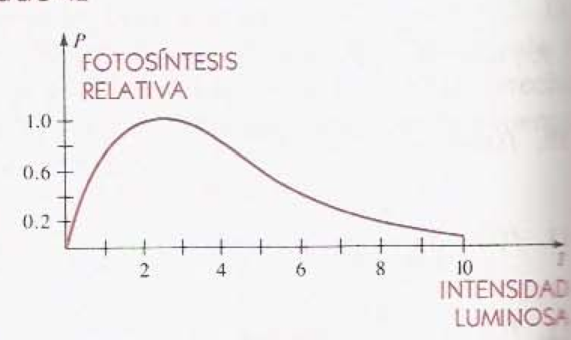
41. La ley de Coulomb de la electrostática dice que la fuerza de atracción F entre dos partículas cargadas es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Una partícula con carga $+1$ se coloca sobre una recta coordenada l entre otras dos partículas de carga -1 (véase la figura).
    (a) Demuestre que la fuerza resultante sobre la partícula con carga $+1$ está dada por
    $$F(x) = -\frac{k}{x^2} + \frac{k}{(x-2)^2}$$
    donde k es una constante positiva.
    (b) Trace la gráfica de F para $0 < x < 2$, tomando $k = 1$.

EJERCICIO 41

42. Los biomatemáticos han propuesto muchas funciones diferentes para describir el efecto de la luz sobre la intensidad con la que se produce la fotosíntesis. Para que la función sea realista debe mostrar el *efecto de fotoinhibición*, es decir, la rapidez de producción P de la fotosíntesis debe tender a cero cuando la intensidad luminosa I alcanza altos niveles (véase la figura). ¿Cuál de las fórmulas siguientes, en las que a y b son constantes, puede servir para evaluar P? Explique su respuesta.

(a) $P = \dfrac{aI}{b+I}$ (b) $P = \dfrac{aI}{b+I^2}$

EJERCICIO 42



4.7 ANTIDERIVADAS

En el Capítulo 3 se estudiaron algunos problemas enunciados en la forma: *Dada una función g, determinar la derivada g′*. Ahora se considera el problema inverso, es decir, *dada una derivada g′, determinar la función g*. Una manera equivalente de enunciar el problema inverso es:

Dada una función f, encontrar una función F tal que F′ = f.

Por ejemplo, sea $f(x) = 8x^3$. En este caso es fácil hallar una función F tal que $F'(x) = f(x)$. Sabemos que al derivar una potencia de x se *reduce* en uno el exponente, y por lo tanto, para obtener F hay que *aumentar* en uno el exponente dado. Así, $F(x) = ax^4$ para algún número a. Derivando, se obtiene $F'(x) = 4ax^3$ y para que sea igual a $f(x)$, a debe ser igual a 2. Entonces, la función F definida por $F(x) = 2x^4$ tiene la propiedad de que $F' = f$. De acuerdo con la siguiente definición, F es una *antiderivada de f*.

DEFINICIÓN (4.30)

> Una función F es una **antiderivada** de otra función f si $F' = f$.

A veces se llama **funciones primitivas** a las antiderivadas. El proceso de encontrar una antiderivada se llama **antiderivación**. La frase $F(x)$ *es una antiderivada de* $f(x)$ significa lo mismo que F *es una antiderivada de* f. Normalmente no se especificará el dominio de las antiderivadas. Del Teorema Fundamental del Cálculo (5.21) se deduce que cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ en el que f es continua, es un dominio adecuado para F.

Las reglas de derivación pueden aplicarse para obtener fórmulas de antiderivadas, como se demuestra a continuación.

TEOREMA (4.31)

Sean $F(x)$ y $G(x)$ antiderivadas de $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente. Entonces

(i) $F(x) + G(x)$ es una antiderivada de $f(x) + g(x)$.

(ii) $kF(x)$ es una antiderivada de $kf(x)$ para cualquier número real k.

Demostración Por hipótesis, $D_x[F(x)] = f(x)$ y $D_x[G(x)] = g(x)$. Por lo tanto,

$$D_x[F(x) + G(x)] = D_x[F(x)] + D_x[G(x)] = f(x) + g(x).$$

Esto demuestra (i). Para demostrar (ii) basta notar que

$$D_x[kF(x)] = kD_x[F(x)] = kf(x) \quad \bullet \bullet$$

El Teorema (4.31) (i) se puede generalizar a la suma de cualquier número finito de funciones. Este hecho puede enunciarse como sigue: *La suma de antiderivadas es una antiderivada de la suma*. Al trabajar con varias funciones a la vez el dominio se restringe a la intersección de sus dominios. Para diferencias de funciones hay un resultado análogo.

Las antiderivadas nunca son únicas. Como la derivada de una constante es cero, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, también lo es $F(x) + C$ para cualquier número C. Por ejemplo, si $f(x) = 8x^3$ entonces las funciones definidas por $2x^4 + 7$, $2x^4 - 3$ y $2x^4 + \frac{3}{5}$ son antiderivadas de f. El siguiente teorema muestra que las funciones de este tipo son las *únicas* antiderivadas de $f(x)$ que existen.

TEOREMA (4.32)

Si F_1 y F_2 son funciones derivables tales que $F_1'(x) = F_2'(x)$ para todo x en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $F_2(x) = F_1(x) + C$ para algún número C y para todo x en $[a, b]$.

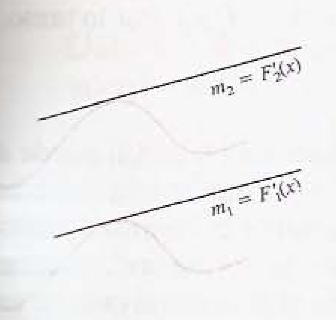
Demostración Definiendo la función g por medio de

$$g(x) = F_2(x) - F_1(x),$$

se obtiene

$$g'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = 0$$

FIGURA 4.56



para todo x en $[a, b]$. Si x es cualquier número tal que $a < x \leq b$, entonces, aplicando el Teorema del Valor Medio (4.12) a la función g en el intervalo cerrado $[a, x]$, existe un número z en el intervalo abierto (a, x) tal que

$$g(x) - g(a) = g'(z)(x - a) = 0 \cdot (x - a) = 0.$$

Por lo tanto, $g(x) = g(a)$ para todo x en $[a, b]$. Sustituyendo en la primera ecuación de esta demostración se obtiene

$$g(a) = F_2(x) - F_1(x).$$

Sumando $F_1(x)$ a ambos lados de la igualdad se obtiene la conclusión deseada con $C = g(a)$. $\bullet \bullet$

En la Figura 4.56 se ilustra gráficamente el significado geométrico del Teorema (4.32). La figura muestra que si las pendientes $m_1 = F_1'(x)$ y $m_2 = F_2'(x)$ de las rectas tangentes a las gráficas de F_1 y F_2, son iguales para todo x en $[a, b]$, entonces a partir de una de las gráficas puede obtenerse la otra mediante un desplazamiento vertical de $|C|$ unidades.

El Teorema (4.32) sirve para demostrar el siguiente

TEOREMA (4.33)

> Si f es una función tal que $f'(x) = 0$ para todo x en $[a, b]$, entonces f es una función constante en $[a, b]$.

Demostración Geométricamente, la conclusión es evidente, pues si f es continua y la pendiente de la recta tangente es cero en todos los puntos de la gráfica, es de esperar que la gráfica sea una recta horizontal (la gráfica de una función constante). Para demostrar este hecho, sea F_2 igual a f y sea F_1 la función definida por $F_1(x) = 0$ para todo x. Como $F_1'(x) = 0$ y $F_2'(x) = f'(x) = 0$, se ve que $F_1'(x) = F_2'(x)$ para todo x en $[a, b]$. Aplicando el Teorema (4.32), se ve que existe un número C tal que $F_2(x) = F_1(x) + C$; es decir, $f(x) = 0 + C$ para todo x en $[a, b]$. Por lo tanto, f es una función constante. • •

Si F_1 y F_2 son antiderivadas de una misma función f, entonces $F_1' = f = F_2'$, y por el Teorema (4.32), $F_2(x) = F_1(x) + C$ para algún C positivo. En otras palabras, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces cualquier otra antiderivada tiene la forma $F(x) + C$, donde C es una constante arbitraria, o sea, un número real no especificado. $F(x) + C$ se llama **antiderivada más general** de $f(x)$.

A lo largo del libro se usará muchas veces la siguiente regla.

REGLA DE LA POTENCIA PARA LAS ANTIDERIVADAS (4.34)

> Sea r un número racional tal que $r \neq -1$.
>
> La derivada más general de x^r es $\dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C$, donde C es una constante arbitraria.

Demostración Sean $f(x) = x^r$ y $F(x) = x^{r+1}/(r + 1)$. Usando la Regla de la Potencia para las *derivadas*, se puede demostrar que $F'(x) = f(x)$. Por lo tanto, $F(x) + C$ es la antiderivada más general de $f(x)$. • •

A partir de la Regla de la Potencia (4.34) y del Teorema (4.31) (ii) puede deducirse que la antiderivada más general de ax^r es $ax^{r+1}/(r + 1)$ para cualquier número real a y para $r \neq -1$. Usando el Teorema (4.31) (i) es posible encontrar la antiderivada más general de una *suma* arbitraria de términos de la forma ax^r, evaluando una antiderivada para cada uno de los términos. Al encontrar la antiderivada de una suma, no hace falta introducir una constante arbitraria para cada término, pues las constantes pueden ser sumadas todas para producir una sola constante C (véase el Ejemplo 1(d)

EJEMPLO 1 Encontrar la antiderivada más general de $f(x)$:

(a) $f(x) = 4x^5$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$
(c) $f(x) = 1/x^2$ (d) $f(x) = 8x^3 - 3x + 7$

Solución Las antiderivadas aparecen en la siguiente tabla. Nótese que para encontrar una antiderivada de x^r, *se aumenta* en uno el exponente r, obteniendo $r + 1$, y luego se divide entre $r + 1$.

$f(x)$	**Antiderivada más general de $f(x)$**
$4x^5$	$4\left(\frac{x^6}{6}\right) + C = \frac{2}{3}x^6 + C$
$\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$	$\frac{x^{5/3}}{5/3} + C = \frac{3}{5}x^{5/3} + C$
$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$\frac{x^{-1}}{(-1)} + C = -\frac{1}{x} + C$
$8x^3 - 3x + 7$	$8\left(\frac{x^4}{4}\right) - 3\left(\frac{x^2}{2}\right) + 7x + C = 2x^4 - \frac{3}{2}x + 7x + C$

•

Para evitar errores algebraicos deben verificarse las soluciones de los problemas de antiderivación, derivando la antiderivada. En cada caso se debe obtener la expresión dada. En el Ejemplo 1(d),

$$D_x(2x^4 - \tfrac{3}{2}x^2 + 7x + C) = D_x(2x^4) - D_x(\tfrac{3}{2}x^2) + D_x(7x) + D_x(C)$$
$$= 8x^3 - 3x + 7 + 0 = f(x).$$

Una **ecuación diferencial** contiene derivadas de una función desconocida. Una función f es una **solución** de una ecuación diferencial si satisface la citada ecuación; es decir, si al sustituir f por la función desconocida se obtiene una igualdad. **Resolver** una ecuación diferencial significa encontrar todas sus soluciones. A veces, además de la ecuación diferencial, se conoce también un valor de la función f que se llama **condición inicial**, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Resolver la ecuación diferencial $f'(x) = 6x^2 + x - 5$ con la condición inicial $f(0) = 2$.

Solución De los comentarios sobre antiderivadas,

$$f(x) = 2x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 - 5x + C$$

para algún número C. Tomando $x = 0$ y usando la condición inicial dada, obtenemos

$$f(0) = 0 + 0 - 0 + C = 2$$

y así, $C = 2$. Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial con la condición inicial dada es

$$f(x) = 2x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 - 5x + 2.$$ •

La expresión *ecuación diferencial* surge del hecho de que puede tener diferenciales en vez de derivadas. Así, la ecuación diferencial del Ejemplo 2 se puede escribir

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + x - 5 \quad \text{o bien} \quad dy = (6x^2 + x - 5)\,dx$$

para $y = f(x)$.

Si un punto P se mueve a lo largo de una recta coordenada, entonces su función de posición s es una antiderivada de su función de velocidad v, es decir, $s'(t) = v(t)$. Análogamente, como $v'(t) = a(t)$, la función de velocidad es una antiderivada de la función de aceleración. Si se conoce la velocidad o la aceleración y se tienen suficientes condiciones iniciales, entonces puede determinarse la función de posición.

EJEMPLO 3 Una lancha de motor se aleja del muelle a lo largo de una línea recta con una aceleración al tiempo t dada por $a(t) = 12t - 4$ pie/s^2. En el tiempo $t = 0$ la lancha tenía una velocidad de 8 pie/s y se encontraba a 15 pie del muelle. Calcular su distancia $s(t)$ al embarcadero al cabo de t segundos.

Solución Como $v'(t) = 12t - 4$, antiderivando obtenemos

$$v(t) = 6t^2 - 4t + C$$

para algún número C. Tomando $t = 0$ y usando el hecho de que $v(0) = 8$, obtenemos $8 = 0 - 0 + C$ y por lo tanto, $C = 8$. Entonces

$$v(t) = 6t^2 - 4t + 8$$

o, equivalentemente

$$s'(t) = 6t^2 - 4t + 8.$$

La antiderivada más general de $s'(t)$ es

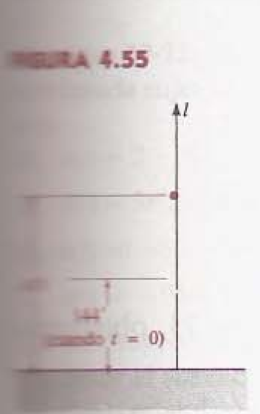
$$s(t) = 2t^3 - 2t^2 + 8t + D$$

donde D es un número arbitrario. Tomando $t = 0$ y usando el hecho de que $s(0) = 15$, se obtiene $15 = 0 - 0 + 0 + D$. Por lo tanto, $D = 15$ y

$$s(t) = 2t^3 - 2t^2 + 8t + 15.$$ •

Sobre cualquier objeto que se encuentre cerca de la superficie de la Tierra actúa una fuerza, llamada *fuerza de gravedad*, la cual produce una aceleración constante que se denota por g. El valor aproximado de g que se utiliza en la mayoría de los problemas es de 9.8 m/s^2 o 980 cm/s^2 o 32 pie/s^2. El uso de esta importante constante de la física se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba desde una altura de 144 pie sobre el suelo con una velocidad inicial de 96 pie/s. Despreciando la resistencia del aire, determinar su altura desde el suelo a los t segundos. ¿Durante qué intervalo de tiempo la piedra sube? ¿En qué momento y con qué velocidad choca la piedra contra el suelo al descender?



Solución El movimiento de la piedra puede representarse por un punto que se mueve sobre una recta vertical l que tiene su origen al nivel del suelo y dirección positiva hacia arriba (véase la Figura 4.57). La altura desde el piso al tiempo t es $s(t)$ y las condiciones iniciales son $s(0) = 144$ y $v(0) = 96$. Como la velocidad va disminuyendo, $v'(t) < 0$; es decir, la aceleración es negativa. Entonces, de los comentarios anteriores a este ejemplo,

$$a(t) = -32.$$

Como v es una antiderivada de a,

$$v(t) = -32t + C$$

donde C es un número arbitrario. Sustituyendo t por 0 y usando el hecho de que $v(0) = 96$, obtenemos que $96 = 0 + C = C$ y por lo tanto,

$$v(t) = -32t + 96.$$

Como $s'(t) = v(t)$, antiderivando queda

$$s(t) = -16t^2 + 96t + D$$

donde D es un número arbitrario. Tomando $t = 0$ y aplicando el hecho de que $s(0) = 144$, obtenemos $144 = 0 + 0 + D = D$. Resulta así que la altura que alcanza la piedra al tiempo t está dada por

$$s(t) = -16t^2 + 96t + 144.$$

El objeto lanzado sube hasta que $v(t) = 0$, es decir, hasta que $-32t + 96 = 0$, o bien $t = 3$. La piedra choca con el suelo cuando $s(t) = 0$, o sea $-16t^2 + 96t + 144 = 0$. Equivalentemente, $t^2 - 6t - 9 = 0$. Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado, $t = 3 \pm 3\sqrt{2}$. La solución $3 - 3\sqrt{2}$ no tiene sentido pues t no puede ser negativo. Por lo tanto, la piedra choca contra el piso a los $3 + 3\sqrt{2}$ s. La velocidad en tal momento es

$$\begin{aligned} v(3 + 3\sqrt{2}) &= -32(3 + 3\sqrt{2}) + 96 \\ &= -96\sqrt{2} \approx -135.8 \text{ pie/s.} \end{aligned}$$ •

En las aplicaciones a la economía, una función se puede obtener a partir de su función marginal por antiderivación, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Un fabricante sabe que el costo marginal correspondiente a la producción de x unidades de cierto componente de una fotocopiadora está dado por $30 - 0.02x$. Si el costo de producir una unidad es de \$35 (dólares), ¿cuál será el costo de producir 100 unidades?

Solución Si C es la función de costo, entonces el costo marginal es la razón de cambio de C con respecto a x, es decir,

$$C'(x) = 30 - 0.02x.$$

Antiderivando obtenemos

$$C(x) = 30x - 0.01x^2 + K$$

donde K es un número arbitrario. Tomando $x = 1$ y usando $C(1) = 35$, obtenemos

$$35 = 30 - 0.01 + K$$

y por lo tanto, $K = 5.01$. Entonces,

$$C(x) = 30x - 0.01x^2 + 5.01.$$

En particular, el costo de producir 100 unidades es

$$C(100) = 3000 - 100 + 5.01 = \$2\,905.01. \quad \bullet$$

EJERCICIOS 4.7

Ejercicios 1-22: Encuentre la antiderivada más general de la función dada.

1. $f(x) = 9x^2 - 4x + 3$
2. $f(x) = 4x^2 - 8x + 1$
3. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 7$
4. $f(x) = 10x^4 - 6x^3 + 5$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{3}{x^2}$
6. $f(x) = \dfrac{4}{x^7} - \dfrac{7}{x^4} + x$
7. $f(x) = 3\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
8. $f(x) = \sqrt{x^3} - \frac{1}{2}x^{-2} + 5$
9. $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{\sqrt[3]{x}}{6} + 7$
10. $f(x) = 3x^5 - x^{5/3}$
11. $f(x) = 2x^{5/4} + 6x^{1/4} + 3x^{-4}$
12. $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2$
13. $f(x) = (3x + 4)^2$
14. $f(x) = (2x + 1)^3$
15. $f(x) = (3x - 1)^2$
16. $f(x) = (2x - 5)(3x + 1)$
17. $f(x) = \dfrac{8x - 5}{\sqrt[3]{x}}$
18. $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 3}{\sqrt{x}}$
19. $f(x) = \sqrt[5]{32x^4}$
20. $f(x) = \sqrt[3]{64x^5}$
21. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$
22. $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x - 2}$

Ejercicios 23-28: Resuelva la ecuación diferencial sujeta a las condiciones dadas.

23. $f'(x) = 12x^2 - 6x + 1$, $f(1) = 5$

24. $f'(x) = 9x^2 + x - 8$, $f(-1) = 1$

25. $f''(x) = 4x - 1$, $f'(2) = -2$, $f(1) = 3$

26. $f'''(x) = 6x$, $f''(0) = 2$, $f'(0) = -1$, $f(0) = 4$

27. $f'''(t) = 3/\sqrt{t}$, $f(1) = 4$, $f'(1) = 2$, $f''(1) = 8$

28. $f''(t) = \sqrt[3]{t^2}$, $f'(1) = 2$, $f(1) = 3$

Ejercicios 29-32: Un punto se mueve sobre una recta coordenada sujeto a las condiciones dadas. Determine $s(t)$.

29. $a(t) = 2 - 6t$, $v(0) = -5$, $s(0) = 4$

30. $a(t) = 3t^2$, $v(0) = 20$, $s(0) = 5$

31. $a(t) = -32$, $v(0) = 80$, $s(0) = 240$

32. $a(t) = -980$, $v(0) = -100$, $s(0) = 400$

33. Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad de 1600 pie/s. Despreciando la resistencia del aire, calcule su altura o distancia desde el suelo $s(t)$ al tiempo t. ¿Cuál es su altura máxima?

34. Un objeto se deja caer desde una altura de 300 m. Despreciando la resistencia del aire, calcule la distancia que recorre en t segundos. ¿Cuál es la velocidad a los 3 s (segundos)? ¿Cuándo llegará al suelo?

35. Se lanza una piedra directamente hacia abajo desde una altura de 96 pie con una velocidad inicial de 16 pie/s. Halle (a) su distancia al suelo a los t segundos, (b) el momento en que llegará al piso y (c) la velocidad con la que llega a tierra.

36. La aceleración de la gravedad para objetos cerca de la superficie de la Luna vale 1.62 m/s^2.
   (a) Determine la altura máxima de una piedra que es lanzada directamente hacia arriba por un astronauta en la Luna con una velocidad de 18 m/s.
   (b) Encuentre la altura máxima de una piedra que es lanzada directamente hacia arriba por el mismo astronauta y con la misma velocidad, pero en la Tierra.

37. Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba desde una altura s_0 pies sobre el piso con una velocidad v_0 pie/s. Demuestre que si se desprecia la resistencia del aire, entonces la altura $s(t)$ a los t segundos está dada por $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$, donde g es la aceleración de la gravedad.

38. Una pelota rueda cuesta abajo sobre un plano inclinado con una aceleración de 0.6 m/s^2. Si a la pelota no se le da ninguna velocidad inicial, ¿qué distancia recorre en t segundos? ¿Qué velocidad inicial debe dársele a la bola para que recorra 30 m en 5 s?

39. Si un automóvil parte del reposo, ¿qué aceleración constante le permitirá recorrer 180 m en 10 s?

40. Si un automóvil viaja con una velocidad de 100 km/h, ¿qué aceleración (negativa) le permitirá detenerse en 9 s?

41. Si C y F denotan las temperaturas en grados Celsius y Fahrenheit, respectivamente, entonces la tasa de variación de F con respecto a C está dada por $dF/dC = \frac{9}{5}$. Si $F = 32$ cuando $C = 0$, use antiderivadas para obtener un fórmula general para F en términos de C.

42. La rapidez de cambio de la temperatura T (en °C) de una solución está dada por $dT/dt = \frac{1}{4}t + 10$, donde t es el tiempo (en minutos). Suponiendo que $T = 5$°C en $t = 0$, encuentre una fórmula para T al tiempo t.

43. El volumen V de un globo cambia con respecto al tiempo con una rapidez dada por $dV/dt = 3\sqrt{t} + \frac{1}{4}t$ pie^3/s. Al tiempo $t = 4$, el volumen es 20 pie^3. Exprese V como una función de t.

44. La pendiente de la recta tangente en cualquier punto P de la gráfica de cierta ecuación es igual al cuadrado de la abscisa de P. Encuentre una ecuación suponiendo que la gráfica pasa (a) por el origen, (b) por el punto (3, 6), (c) por el punto (-1, 1). Trace la gráfica en cada caso.

45. Un pequeño país tiene una reserva de gas natural de 100 000 millones de pies cúbicos. Si $A(t)$ denota la cantidad total de gas natural que se ha consumido en t años, entonces dA/dt es la *rapidez o tasa de consumo*. Se predice que dicha rapidez será de $5000 + 10t$ millones de pies cúbicos al año. ¿En cuántos años se agotarán las reservas de gas natural de esa nación?

46. Consulte el Ejercicio 45. De acuerdo con las estadísticas de la secretaría de Energía del gobierno de Estados Unidos, el consumo anual de gasolina en aquel país es de aproximadamente $dA/dt = 2.74 - 0.11t - 0.01t^2$ miles de millones de galones, donde $t = 0$ corresponde al año 1980. Calcule el número de galones que se consumieron entre 1980 y 1984.

47. Un fabricante de ropa deportiva sabe que el costo marginal de producir x prendas es $20 - 0.015x$

y el costo de producir una es \$25 (dólares). Encuentre la función de costo y el costo de producir 50 unidades.

48. La función de costo marginal de un producto está dada por $2/x^{1/3}$ y el costo de producir 8 unidades es \$20. Encuentre la función de costo y el costo de producir 64 unidades.

49. La función de ingreso marginal de un producto está dada por $x^2 - 6x + 15$. Determine la función de ingreso y la función de demanda marginal.

50. Repita el Ejercicio 49 suponiendo que la función de ingreso marginal está dada por $x + (4/\sqrt{x})$.

4.8 REPASO

Defina o discuta lo siguiente.

1. Función creciente o decreciente.
2. Máximo absoluto o mínimo absoluto de una función.
3. Máximo local o mínimo local de una función.
4. Números críticos de una función.
5. Máximos y mínimos en la frontera.
6. Teorema de Rolle.
7. Teorema del Valor Medio.
8. Criterio de la Primera Derivada.
9. Concavidad hacia arriba y concavidad hacia abajo.
10. Criterios para determinar la concavidad.
11. Punto de inflexión.
12. Criterio de la Segunda Derivada.
13. $\text{lím}_{x\to\infty} f(x) = L$; $\text{lím}_{x\to-\infty} f(x) = L$.
14. $\text{lím}_{x\to a} f(x) = \infty$; $\text{lím}_{x\to a} f(x) = -\infty$.
15. Asíntotas verticales y horizontales.
16. La antiderivada de una función.
17. Regla de la Potencia para las Antiderivadas.
18. Ecuación diferencial.

EJERCICIOS 4.8

1. Sea $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Encuentre un número c que satisfaga la conclusión del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[0, 4]$.
2. El límite de velocidad en una autopista de peaje de 200 km de largo es de 120 km/h. Al entrar a la autopista, un conductor recibe una tarjeta que tiene marcada la hora exacta de entrada. Si el conductor termina el recorrido en 1 hora con 40 minutos o menos, se le impone una multa por exceso de velocidad al momento de pagar el peaje. Use el Teorema del Valor Medio para justificar esta medida.

Ejercicios 3-5: Use el Criterio de la Primera Derivada para calcular los máximos y mínimos locales de f. Describa los intervalos en los que f es creciente o decreciente y trace la gráfica de f.

3. $f(x) = -4x^3 + 9x^2 + 12x$
4. $f(x) = 1/(1 + x^2)$
5. $f(x) = (4 - x)x^{1/3}$

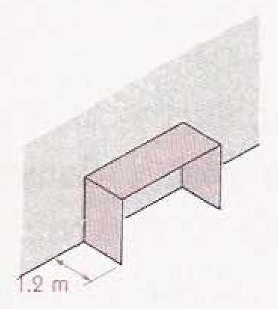
Ejercicios 6-9: Use el Criterio de la Segunda Derivada para encontrar los máximos y mínimos locales de f. Analice la concavidad, encuentre las abscisas de los puntos de inflexión y trace la gráfica de f.

6. $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$
7. $f(x) = 1/(1 + x^2)$
8. $f(x) = 40x^3 - x^6$
9. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 6$
10. Determine los máximos y mínimos locales, analice la concavidad y trace la gráfica de la función f dada por $f(x) = |x^3 - 6x|$.
11. Una persona desea cercar un campo rectangular y luego subdividirlo en tres lotes más pequeños colocando dos cercas paralelas a uno de los lados. ¿Qué dimensiones le permitirán abarcar mayor

área si su presupuesto le permite comprar sólo 1000 m de material?

12. Un cobertizo rectangular que consta de dos paredes o lados verticales de 1.2 m de ancho y un techo plano, se va a agregar a una estructura ya existente, como se ilustra en la figura. El techo se hará de un material que cuesta \$45 el metro cuadrado. Los dos lados se construirán de un material que cuesta \$18 el metro cuadrado. Si se cuenta con un presupuesto de \$400 para la construcción, ¿qué dimensiones proporcionarán el volumen máximo?

EJERCICIO 12



13. Se desea construir un canalón con sección en forma de "V" con dos láminas de metal rectangulares de 25 cm de ancho. Demuestre que la capacidad del canalón es máxima cuando las láminas se colocan perpendiculares una a la otra.

14. Calcule la altura del cilindro circular recto de mayor área que se puede inscribir en una esfera de radio a.

15. El interior de una pista de carreras de 400 m consta de un rectángulo con dos semicírculos en dos de los lados opuestos. Encuentre las dimensiones con las que se obtiene la mayor área del rectángulo.

16. Una compañía de televisión por cable da servicio a 5000 hogares y cobra \$20 (dólares) al mes. Una investigación de mercado indica que si se reduce el precio en \$1, se obtendrían 500 clientes nuevos. Calcule el precio mensual que dará el mayor ingreso a la compañía.

17. Un alambre de 5 pie de largo se va a dividir en dos partes. A una de las piezas se le dará la forma de una circunferencia y a la otra la de un cuadrado. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas del círculo y el cuadrado sea (a) máxima, (b) mínima?

18. Una compañía de instrumentos electrónicos sabe que el costo de producir x calculadoras al día es $C(x) = 500 + 6x + 0.02x^2$. Cada calculadora se vende en \$18 (dólares). Encuentre (a) la función de ingreso, (b) la función de utilidad (o ganancia, (c) la producción diaria que dará la máxima utilidad y (d) la ganancia diaria máxima.

Ejercicios 19-26: Determine el límite, si es que existe.

19. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{(2x-5)(3x+1)}{(x+7)(4x-9)}$

20. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x+11}{\sqrt{x+1}}$

21. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{6-7x}{(3+2x)^4}$

22. $\lim_{x \to -3} \sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x^3+27}}$

23. $\lim_{x \to 2/3^+} \dfrac{x^2}{4-9x^2}$

24. $\lim_{x \to 3/5^-} \dfrac{1}{5x-3}$

25. $\lim_{x \to 0^+} \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

26. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2}}$

Ejercicios 27-30: Encuentre las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, y trace la gráfica de f.

27. $f(x) = \dfrac{3x^2}{9x^2-25}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

29. $f(x) = \dfrac{x^2+2x-8}{x+3}$

30. $f(x) = \dfrac{x^4-16}{x^3}$

31. En la bioquímica, la respuesta química R correspondiente a una concentración S de una sustancia, está dada por $R = kS^n/(S^n + a^n)$, donde k, n y a son constantes positivas. Un ejemplo es la rapidez R con que el hígado extrae alcohol de la sangre, donde S es la concentración alcohólica. Demuestre que R es una función creciente de S y que $R = k$ es una asíntota horizontal de la curva respectiva.

32. Un pequeño edificio debe tener 120 m² de planta. La figura muestra un plano de la edificación. Los muros cuestan \$300 (dólares) el metro lineal y el costo del espacio encima de las puertas es despreciable.
   (a) Demuestre que el costo $C(x)$ de los muros es

$$C(x) = 100[3x - 6 + (1000/x)].$$

EJERCICIO 32



(b) Encuentre las asíntotas verticales y oblicuas, y trace la gráfica de $C(x)$ para $x > 0$.

(c) Halle el diseño que minimice el costo.

Ejercicios 33-38: Encuentre la antiderivada más general de f.

33. $f(x) = \dfrac{8x^2 - 4x + 5}{x^4}$

34. $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - x$

35. $f(x) = 100$

36. $f(x) = x^{3/5}(2x - \sqrt{x})$

37. $f(x) = (2x + 1)^3$

38. $f(x) = 0$

39. Resuelva la ecuación diferencial $f''(x) = x^{1/3} - 5$ con $f'(1) = 2$ y $f(1) = -8$.

40. Se lanza una piedra directamente hacia abajo desde una altura de 300 m con una velocidad inicial de 10 m/s. Encuentre su distancia al suelo a los t segundos. ¿Cuál es su velocidad a los 5 s? ¿Cuándo hará contacto con el suelo?

CUEROS SINTÉTICOS
NIT. 830.027.581-6
Actividad Económica No. 204

SinteUnidas Ltda.

...La Moda

Cra. 24 No. 17 - 64 Sur
Bogotá, D.C.

FACTURA DE VENTA - CONTADO

BE **Nº 24548**

Original: Cliente

FECHA	Día	Mes	Año
	03	04	2006

Comprador: Luis Alberto Aguiar NIT: CC 12'105.766
Dirección: Tel.: 2521639

CODIGO	DESCRIPCION	COLOR	CANT.	V. UNIT.	V. TOTAL
201	Sandalia dama		5doc.	13.440	67.200
208	" "		4doc.	13.440	53.760
210	" "		4	13.440	53.760
213	" "		3	13440	40.320
214	" "		3	13440	40.320
216	" "		2	13440	26880
217	" "		2	13.440	26.880
218	" "		1	13.440	13.440
				Subtotal	
				IVA	
				TOTAL	

Forma de Pago: Efectivo [X] Cheque [ ] Vendedor: ____
Cheque No.: ____ Banco: ____

Original: Cliente - 1ra Copia: Consecutivo Oficina - 2da Copia: Cons. Oficina Principal

NOE TOLEDO - TOLEDO IMPRESORES NIT: 3.292.797-4 TEL: 4362626

Res. No. 300000333767 del 20.001 al 30.000 de 2005/07/13